Physik IV - Schriftliche Sessionsprüfung Winter 2008/2009

9:00 – 11:00, Donnerstag, 29. Januar 2009, HG D 5.2

Bitte zur Kenntnis nehmen:

- Es befinden sich insgesamt **6** Aufgaben auf **FÜNF Blättern**.
- Es können insgesamt 60 Punkte erreicht werden. Die Punkte der einzelnen Teile einer Aufgabe sind in eckigen Klammern am rechten Rand ausgewiesen.
- Eine Tabelle mit physikalischen Konstanten befindet sich auf der Rückseite des Deckblattes.
- Sie sind berechtigt 10 Seiten handschriftliche Notizen sowie einen Taschenrechner und ein Wörterbuch bei der Prüfung zu verwenden.
- Bitte schreiben Sie KLAR und DEUTLICH. Falls wir Ihre Handschrift nicht entziffern können, können wir leider keine Punkte vergeben.
- Bitte fügen Sie UNTEN IHREN NAMEN ein. Dieses Blatt wird am Ende der Prüfung zu Ihren Antworten geheftet.
- Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Ihrer abgegebenen Blätter.
- Während der Prüfung steht die Prüfungsaufsicht zur Beantwortung Ihrer Fragen zur Verfügung. Zögern Sie daher nicht, bei Unklarheiten diese zu stellen.

NAME:	VORNAME:

Fragen:	1	2	3	4	5	6	GESAMT
Punkte:							
Max:	7	9	12	11	10	11	60

Tabelle physikalischer Konstanten

Lichtgeschwindigkeit, c	3.00×10^{8} ms^{-1}
Planck Konstante, h	6.63×10^{-34} Js
$\hbar = h/(2\pi)$	1.05×10^{-34} Js
Elektronenladung, e	1.60×10^{-19} C
Elektronenvolt, eV	1.60×10^{-19} J
Elektronenmasse, m_e	9.11×10^{-31} kg
Neutronenmasse, m_n	1.67×10^{-27} kg
Atomare Masseneinheit, m_u	1.66×10^{-27} kg
Elektrische Feldkonstante, ϵ_0	8.85×10^{-12} As/Vm
Boltzmann Konstante, k_B	1.38×10^{-23} JK^{-1}
Bohrsches Magneton, μ_B	9.27×10^{-24} JT^{-1}
Bohr Radius, a_0	5.3×10^{-11} m
Stefan-Boltzmann Konstante, σ	5.67×10^{-8} Wm^{-2}K^{-4}
Wiensche Verschiebungskonstante, b	2.9×10^{-3} mK

1. Der Comptoneffekt beschreibt die Streuung von Röntgenstrahlung an freien Elektronen in Metall. Die Wellenlänge des um einen Winkel θ von der Einfallsrichtung gestreuten Lichts ist um

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

verschoben.

   (a) Welche physikalischen Gesetzmässigkeiten sind zur Herleitung dieser Formel notwendig. Welche Bedeutung hat hier die Quantentheorie? [3]

   (b) Geben Sie eine physikalische Begründung an, warum die Wellenlänge bei grösseren Streuwinkeln zunimmt. [2]

   (c) Nehmen Sie eine Wellenlänge $\lambda = 0.1$ Å der Röntgenstrahlung an. Wie gross ist der maximale Anteil der Photonenenergie, der durch Comptonstreuung auf das Elektron übertragen werden kann? [2]

---

2. Ein Strahl von Neutronen wird auf einen Kristall gelenkt, dort an den periodisch angeordneten Kernen gestreut und anschliessend in Abhängigkeit vom Streuwinkel detektiert.

   (a) Erklären Sie, warum unter gewissen Winkeln keine Neutronen detektiert werden. [1]

   (b) Leiten Sie die Bragg-Bedingung $2d\sin\theta = n\lambda$ für Streuung von Neutronen an einem Kristallgitter her. Welche Bedeutung hat λ und von welchen Parametern hängt diese Grösse ab? [3]

   (c) Gibt es eine Änderung der Streuwinkel bei einer Erhöhung der Strahlintensität? [1]

   (d) Berechnen Sie die mittlere Wellenlänge von thermischen Neutronen mit einer Temperatur von 300 K sowie deren Streuwinkel (1. Ordnung) an der Gitterebene eines Kupferkristalls mit Gitterabstand $d = 3.6$ Å. [2]

   (e) Die Breite des Neutronenstrahls mit dieser Wellenlänge soll durch Anbringen eines Spalts auf 100 nm beschränkt werden. Schätzen Sie die daraus resultierende Winkelunschärfe ab. [2]

3. Die spektrale Energiedichte der elektromagnetischen Strahlung eines schwarzen Strahlers mit einer Temperatur T ist durch die Planckverteilung gegeben:

$$U(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}.$$

(a) Leiten Sie einen Ausdruck für $U(\nu)$ für die folgenden Grenzfällen her:

i. $h\nu \ll k_B T$ (Rayleigh-Jeans Gesetz), [2]

ii. $h\nu \gg k_B T$. [2]

(b) Skizzieren Sie sowohl die exakte als auch die genäherten Verteilungen für eine gegebene Temperatur T_1 in einem Diagramm. Zeichnen Sie ausserdem eine zweite Planckverteilung bei einer höheren Temperatur T_2 in das Diagramm ein. [3]

(c) Die gesamte abgestrahlte Leistung pro Einheitsfläche M von der Oberfläche eines kugelförmigen schwarzen Strahlers ist durch das Stefan-Boltzmann Gesetz

$$M = \sigma T^4$$

gegeben. Berechnen Sie mit Hilfe der unten angegebenen Werte die maximale Leistung, die der Planet Mars von der Strahlung der Sonne absorbieren kann. [2]

Temperatur der Sonne, T_s	5900 K
Radius der Sonne, r_s	7×10^8 m
Radius von Mars, r_m	3.4×10^6 m
Distanz zwischen Mars und Sonne, D_m	2×10^{11} m

(d) Nehmen Sie an, dass tatsächlich die gesamte Leistung absorbiert wird, und dass der Planet Mars ebenfalls als schwarzer Strahler beschrieben werden kann. Wie hoch ist in diesem Fall seine Temperatur T_m? Ist der ermittelte Wert realistisch? Warum? [3]

4. Teilchen mit Masse m befinden sich in einem Potentialtopf mit Seitenlänge a in $x-$ und $y-$Richtung und Seitenlänge b in Richtung z. Das Wandpotential ist durch

$$\begin{array}{ll} V(x,y,z) = 0 & 0 < x < a,\, 0 < y < a,\, 0 < z < b \\ V(x,y,z) = \infty & \text{sonst,} \end{array}$$

gegeben.

(a) Leiten Sie die Form der normierten Wellenfunktion der Energieeigenzustände in diesem Potential mit Hilfe der zeitunabhängigen Schrödingergleichung her. Verwenden Sie die Quantenzahlen n, p, q zur Benennung der verschiedenen möglichen Zustände entlang der $x-$, $y-$ und $z-$Achse. [4]

(b) Zeigen Sie, dass die Energie der Eigenzustände durch

$$E(n,p,q) = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{n^2+p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}\right)$$

gegeben ist. [2]

(c) Nehmen Sie an, alle Teilchen seien Elektronen, und die Seitenlänge $a = 10b$. Die Elektronen werden – beginnend mit dem Grundzustand – in Zustände mit ansteigender Energie in die Potentialtopf gefüllt. *Schätzen* Sie ab, wieviele Elektronen in den Potentialtopf gefüllt werden können, sodass sich noch alle im Grundzustand bezüglich der $z-$ Richtung ($q = 1$) befinden. [3]

(d) Nehmen Sie an, es befindet sich ein Elektron im Potentialtopf. Bis zu welcher Temperatur würde das System für den Fall $a = 10b = 1\ \mu$m im Grundzustand bezüglich der $z-$ Richtung bleiben? [2]

---

5. Die Natrium-D-Linie ist die dominante Spektrallinie im Spektrum von Natrium.

(a) Geben Sie die Elektronenkonfiguration des Grundzustandes von Natrium $^{23}_{11}$Na an. Welche Elektronen tragen hauptsächlich zu den beobachtbaren Strahlungsübergängen bei? [2]

(b) Geben Sie Haupt-, Bahndrehimpuls- und Spinquantenzahl der am Übergang beteiligten elektronischen Zustände $3^2\mathrm{S_J}$ und $3^2\mathrm{P_J}$ an. Wie lauten die möglichen Werte des Gesamtdrehimpuls J der beiden Zustände? Geben Sie die möglichen Übergänge unter Berücksichtigung der Spin-Bahn Kopplung im Termschema an. [3]

(c) In einem starken Magnetfeld dominiert die Energieaufspaltung aufgrund des magnetischen Feldes. Diese kann anhand der Formel

$$\Delta E = \frac{e}{2m_e} B_z (L_z + 2S_z)$$

für die möglichen Einstellungen des Spin- und Bahndrehimpuls berechnet werden. Geben Sie die möglichen Werte von ΔE für das s- und p- Orbital an. Erstellen Sie ein Diagramm und zeichnen Sie die erlaubten Übergänge ein. Wieviele verschiedene Linien können tatsächlich beobachtet werden? [5]

---

6. Die quantenmechanische Beschreibung des Wasserstoffatoms stellt die Grundlage der Atomphysik dar.

(a) Wie ändert sich – unter Vernachlšsigung der Spin-Bahn Kopplung – die Gesamtenergie des Elektrons im freien Wasserstoffatom in Abhängigkeit von l und m_l für fixes n? Geben Sie die möglichen Werte von l und m_l an. Welche Bedeutung haben n, l und m_l. Welche weitere Quantenzahl ist für eine vollständige Beschreibung des Zustandes notwendig? [2]

(b) Skizzieren Sie die möglichen Wahrscheinlichkeitsdichten eines Elektrons im Wasserstoffatom für die Zustände $1s$, $2s$ und $2p$ ($m_l = 0, \pm 1$) als Funktion von r und θ. [2]

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert der Gesamtenergie

$$\langle E \rangle = \left\langle -\frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \right\rangle$$

des $1s$ und des $2p$ Zustandes und ermitteln Sie die Übergangsfrequenz zwischen diesen beiden Zuständen. Verwenden Sie dazu die Wellenfunktion $\Psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta,\phi)$ mit

$$
\begin{aligned}
Y_{0,0} &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}} & R_{1,0} &= 2\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-Zr/a_0} \\
Y_{1,0} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta & R_{2,0} &= 2\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2}\left(1-\frac{Zr}{2a_0}\right) e^{-Zr/(2a_0)} \\
Y_{1,\pm 1} &= \mp\sqrt{\frac{3}{\pi}}\sin\theta e^{\pm\imath\phi} & R_{2,1} &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2}\left(\frac{Zr}{2a_0}\right) e^{-Zr/(2a_0)}.
\end{aligned}
$$

sowie die Formel [4]

$$\int_0^\infty r^n e^{-ar} dr = n!/a^{n+1}.$$

(d) Können Sie eine allgemeine Formel für die Übergangsfrequenz von n zu n' angeben? [1]

(e) Welcher Übergang zu $2s$ in einfach ionisiertem Helium He^+ hat in etwa dieselbe Frequenz wie der Übergang von $2p$ zu $1s$ in Wasserstoff? [2]