Physik IV - Schriftliche Sessionsprüfung
Winter 2009/10

9:00 - 11:00, 3. Februar 2010, HG D 5.2

Bitte zur Kenntnis nehmen:

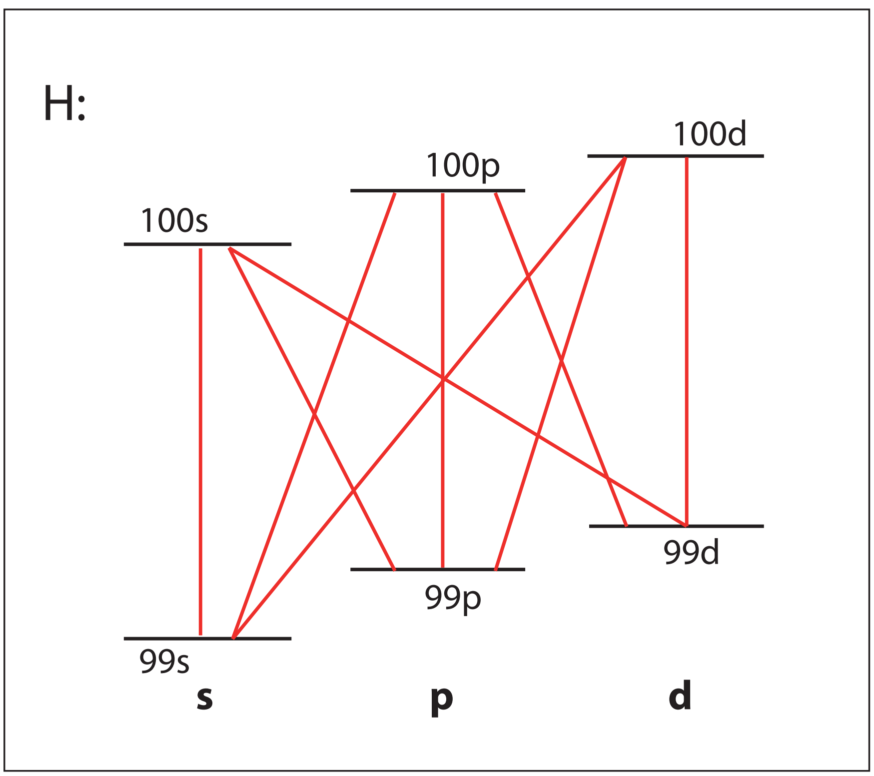
- Es befinden sich insgesamt **SECHS** Aufgaben auf **FÜNF SEITEN**.
- Es können insgesamt 60 Punkte erreicht werden. Die Punkte der einzelnen Teile einer Aufgabe sind in eckigen Klammern am rechten Rand ausgewiesen.
- Eine Tabelle mit physikalischen Konstanten befindet sich auf der Rückseite des Deckblattes.
- Sie sind berechtigt 10 Seiten handschriftliche Notizen sowie einen Taschenrechner und ein Wörterbuch bei der Prüfung zu verwenden.
- Bitte schreiben Sie KLAR und DEUTLICH. Falls wir Ihre Handschrift nicht entziffern können, können wir leider keine Punkte vergeben.
- Bitte fügen Sie UNTEN IHREN NAMEN ein. Dieses Blatt wird am Ende der Prüfung zu Ihren Antworten geheftet.
- Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Ihrer abgegebenen Blätter.
- Während der Prüfung steht die Prüfungsaufsicht zur Beantwortung Ihrer Fragen zur Verfügung.

NAME:	VORNAME:

Fragen:	1	2	3	4	5	6	GESAMT
Punkte:							
Max:	9	12	10	8	10	11	60

Tabelle physikalischer Konstanten

Lichtgeschwindigkeit, c	3.00×10^{8} ms^{-1}
Planck Konstante, h	6.63×10^{-34} Js
$\hbar = h/(2\pi)$	1.05×10^{-34} Js
Elektronenladung, e	1.60×10^{-19} C
Elektronenvolt, eV	1.60×10^{-19} J
Elektronenmasse, m_e	9.11×10^{-31} kg
Neutronenmasse, m_n	1.67×10^{-27} kg
Atomare Masseneinheit, m_u	1.66×10^{-27} kg
Elektrische Feldkonstante, ϵ_0	8.85×10^{-12} As/Vm
Boltzmann Konstante, k_B	1.38×10^{-23} JK^{-1}
Rydberg Konstante, R_∞	1.10×10^{7} m^{-1}
Rydberg Energie, $Ry = R_\infty hc$	2.18×10^{-18} J
Bohrsches Magneton, μ_B	9.27×10^{-24} JT^{-1}
Bohr Radius, a_0	5.3×10^{-11} m
Stefan-Boltzmann Konstante, σ	5.67×10^{-8} Wm^{-2}K^{-4}
Wiensche Verschiebungskonstante, b	2.9×10^{-3} mK



1. **Rutherford-Streuung**

   (a) Skizzieren Sie den Versuchsaufbau zur Messung der Rutherford-Streuung sowie die zugehörige typische Messkurve. [2]

   (b) Erkären Sie in wenigen Worten, wie das Resultat dieses Versuchs ein Atommodell unterstützt, in welchem die positive Ladung grösstenteils auf einen sehr kleinen Kern konzentriert ist. [2]

   (c) Beschreiben Sie, wie sich das Resultat des Versuchs unterschiede, wenn anstatt der α-Teilchen (i) Elektronen oder (ii) Neutronen verwendet würden. [2]

   (d) Bei einem Streuversuch werden 1000 α-Teilchen pro Sekunde bei einem Streuwinkel θ von 30° detektiert. Angenommen, die Zählrate $N(\theta)$ in einem kleinen Streuwinkelbereich $d\theta$ ist proportional zu $\sin^{-4}(\theta/2)$. Wie viele Teilchen pro Sekunde würden in diesem Falle bei einem Streuwinkel von 10° bzw. 150° detektiert werden? [1]

   (e) Welche der beiden Vorhersagen aus (d) wird vom realen Messresultat abweichen? Begründen Sie ihre Antwort. [2]

---

2. **Materiewellen**

   (a) Elektronen mit einer Wellenlänge von $\lambda = 0.1$ Å passieren einen Schlitz der Breite $d = 0.5\ \mu$m. Wie gross ist die aufgrund der Heisenbergschen Unschärferelation zu erwartende minimale Unschärfe der transversalen Impulskomponente hinter dem Spalt relativ zum Gesamtimpuls? [2]

   (b) Skizzieren Sie das Intensitätsmuster der auf einen Schirm hinter dem Spalt auftreffenden Elektronen als Funktion des Winkels zur Strahlrichtung und erklären Sie dessen charakteristische Eigenschaften. Erklären Sie ausserdem den Zusammenhang mit der Heisenbergschen Unschärferelation. [3]

   (c) Ändert sich das Intensitätsmuster aus (b), wenn anstatt Elektronen Photonen äquivalenter Energie verwendet werden? Begründen Sie Ihre Antwort. [2]

   (d) Geben Sie die Energie-Impuls-Relation eines (relativistischen) Elektrons der Masse m und die eines Photons an und zeigen Sie den Unterschied anhand eines Graphen. Was bedeuten diese unterschiedlichen Relationen für die Ausbreitung eines Wellenpakets mit endlicher Frequenzbreite? [3]

(e) Die Wellenfunktion eines freien Elektrons ist durch $\psi(z,t) \propto e^{\mathrm{i(kz-\omega t)}}$ gegeben. Welche Relation muss für $\omega(k)$ gelten, damit $\psi(z,t)$ die (nicht-relativistische) Schrödingergleichung erfüllt. Zeigen Sie dies explizit. [2]

---

3. **Bohrsches Atommodel und Rydberg Atome**

(a) Rydberg-Atome sind Atome, in denen sich ein Elektron der äussersten Schale in einem hoch angeregten Energieniveau befindet. Warum unterscheiden sich Rydberg-Zustände unterschiedlicher Atome nur unwesentlich von denen eines Wasserstoff-Rydberg Atoms? [1]

(b) Die Ionisationsenergie eines Wasserstoffatoms im Grundzustand beträgt -13.6 eV. Berechnen Sie anhand der Rydberg-Formel die Ionisationsenergie eines Wasserstoff-Rydberg-Atoms im Energieniveau $n = 100$. [2]

(c) Wie ändert sich die Ionisationsenergie bei Anlegen eines äusseren homogenen elektrischen Feldes? Erklären Sie anhand einer Skizze. [2]

(d) Zeigen sie, dass die Übergangsfrequenz zweier benachbarter Energieniveaus n_{i-1} und n_i für grosse $n_{i-1} \approx n_i$ proportional zu $1/n^3$ ist (Hinweis: $(1-x)^{-2} = 1 + 2x$ für $x \ll 1$). Inwiefern stellt dieses Ergebnis ein Beispiel für das *Korrespondenzprinzip* dar? [3]

(e) Streichen Sie im Diagramm auf dem Deckblatt die verbotenen Dipol-Übergänge eines Wasserstoff-Atoms in einem Zustand mit Hauptquantenzahl $n = 100$. Begründen Sie Ihre Entscheidung. [2]

---

4. **Schwarzkörperstrahlung**

Ein schwarzer Strahler der Oberflächentemperatur T emittiert von seiner Oberfläche Strahlung gemäss der Formel

$$B(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp[h\nu/k_B T] - 1}.$$

Diese gibt die Strahlungsleistung pro Flächeneinheit, pro spektraler Frequenzeinheit und pro Steradian des Raumwinkels an.

(a) Zeigen Sie, dass für niedrige Frequenzen ($\nu_1, \nu_2 \ll k_B T/h$) die Strahlungsleistung im Frequenzbereich $\nu_1 < \nu < \nu_2$ pro Flächeneinheit pro Steradian durch die folgende Formel gegeben ist: [3]

$$p(T) = \frac{2k_B T}{3c^2}(\nu_2^3 - \nu_1^3).$$

(b) Der Planet Venus hat einen Radius von 6000 km und eine Oberflächentemperatur von 735 K. Wie gross ist die vom Planeten ausgestrahlte Leistung, die von einer weit entfernten Antenne im Mikrowellen-Frequenzbereich $3 < \nu < 30$ GHz pro Steradian aufgenommen werden kann? [2]

(c) Der Bahnradius der Venus und der Erde um die Sonne beträgt 108×10^6 km bzw. 150×10^6 km. Nehmen Sie an, die Erdatmospähre absorbiere nur einen vernachlässigbaren Anteil der Mikrowellenstrahlung. Wie gross ist die maximale Strahlungsleistung der Venus, die von einer Antenne mit Oberfläche $A = 100$ m^2 auf der Erde im Frequenzband $3 < \nu < 30$ GHz empfangen werden kann? [3]

---

5. **Schrödingergleichung**

Ein Teilchen befindet sich in einer kubischen Box mit Seitenlänge a. Die potentielle Energie ist durch

$$\begin{array}{ll} V(x,y,z) = 0 & 0 < x < a,\ 0 < y < a,\ 0 < z < a \\ V(x,y,z) = \infty & \text{sonst} \end{array}$$

gegeben. Die Wellenfunktionen der Eigenzustände des Teilchens in der Box lauten

$$\psi = A \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{p\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{q\pi z}{a}\right)$$

mit den ganzzahligen Quantenzahlen n, p, q.

(a) Zeigen Sie, dass die Normierungskonstante den Wert $A = (2/a)^{3/2}$ annimmt und begründen Sie Ihre Antwort. [3]

(b) Geben Sie die möglichen Energien des Teilchens an. [2]

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle \hat{x} \rangle$ und die Ortsunschärfe Δx eines Teilchens im Eigenzustand mit Quantenzahlen n, p, q als Funktion von a und n. Benutzen Sie dazu die Integralrelationen [5]

$$\int_0^a x \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \frac{a^2}{4} \quad \text{und}$$

$$\int_0^a x^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \frac{a^3}{12}\left(2 - \frac{3}{n^2\pi^2}\right).$$

---

6. **Harmonischer Oszillator und Messung**

(a) Der Erzeugungsoperator eines harmonischen Oszillators der Masse m und Kreisfrequenz ω mit Potential $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ ist durch

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}(m\omega\hat{x} - i\hat{p})$$

gegeben. Berechnen Sie ausgehend vom Grundzustand

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} e^{-m\omega x^2/2\hbar}$$

den ersten angeregten Zustand $\psi_1(x)$. [3]

(b) Welcher physikalischen Observable entspricht $\hat{O} = \hbar\omega\hat{n}$ mit dem Teilchenzahloperator $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$? Wie lautet deren Erwartungswert für den Zustand $\psi_1(x)$. [2]

(c) Für welche der Zustände $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$ bzw. dem Superpositionszustand

$$\psi(x) = 2/\sqrt{5}\psi_0(x) + 1/\sqrt{5}\psi_1(x)$$

ist der Erwartungswert der Observablen $\hat{O}$ scharf? Begründen Sie. [2]

(d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit bei einer Energiemessung das System im ersten angeregten Zustand zu finden, wenn sich der harmonische Oszillator im Zustand $\psi(x)$ aus (c) befindet? [1]

(e) Berechnen Sie für $\nu = \omega/(2\pi) = 10$ GHz nach welcher Zeit das System wieder in den Ausgangszustand $\psi(x)$ zurückkehrt. Geben Sie dazu einen Ausdruck für die Zeitentwicklung des Systems an. [3]
