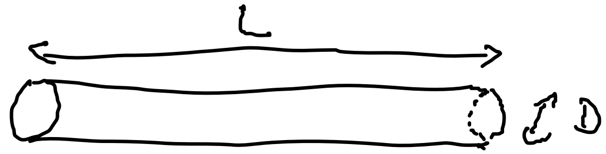
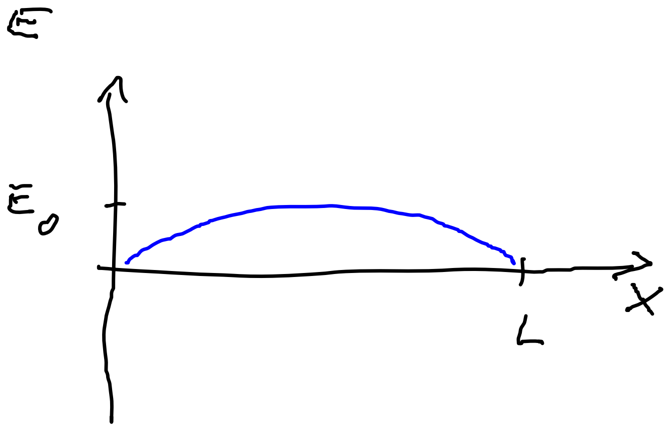
3.5.1 Der 1D schwarze Strahler:



- Objekt der Länge *L* und Durchmesser *D* << *L* bei fester Temperatur *T.*

- Beispiel für einen realen 1D schwarzen Strahler: ein Koaxialkabel oder Hohlleiter bei ausreichend niedrigen Temperaturen



- Elektromagnetische Energie ist in Form von stehenden elektromagnetischen Wellen in diesem Objekt gespeichert.

- **Frage**: Wieviel elektromagnetische Energie *U* ist in einem solchen Objekt bei Temperatur *T* gespeichert?

Vorgehensweise:

a. Bestimme die Energie *U*, die in einer einzelnen stehenden Welle (einer Mode) bei fester Wellenlänge λ oder Frequenz ν gespeichert ist.

b. Bestimme die Anzahl der möglichen stehenden Wellen (Moden) in Abhängigkeit von der Frequenz.

c. Bestimme die Gesamtenergie der im Objekt gespeicherten elektromagnetischen Strahlung durch Aufsummieren der Energie der einzelnen Moden.

(a) Energie einer stehenden elektromagnetischen Welle:

- klassische Energiedichte:

$$w = \frac{1}{2}(ED + HB) = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\mu\mu_0 B^2$$

  - Energie ist gleichverteilt zwischen elektrischem Feld *E* und magnetischem Feld *B*.
  - Die Energie einer Mode ist proportional zur Feldamplitude (E_0, B_0), kann also beliebige Werte annehmen.

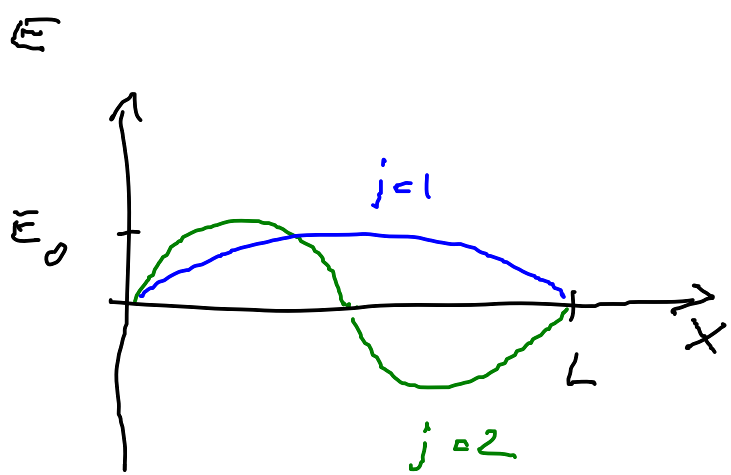
- statistische Physik: Die mittlere Energie einer Mode beträgt im thermischen Gleichgewicht nach dem Gleichverteilungssatz $k_B\, T / 2$ pro Freiheitsgrad.
  $\rightarrow$ Rayleigh-Jeans Gesetz

- Quantenmechanik: Die Energie einer Mode ist in Photonen der Energie $h\nu$ quantisiert. Die Anzahl der Photonen in einer Mode wird durch die Bose-Einstein Verteilungsfunktion f_{BE} bestimmt.
  $\rightarrow$ Plancksches Strahlungsgesetz

$$f_{BE} = \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

(b) Anzahl der Moden und Modendichte in 1D:

- Resonanzbedingung: $j \frac{\lambda_j}{2} = L \qquad j = 1, 2, 3 \ldots$



- Modenindex *j*: $j = \frac{2L}{\lambda_j} = \frac{2L}{c} \nu_j$

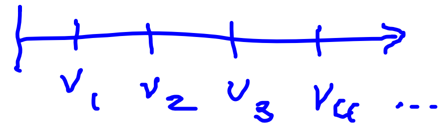
- niedrigste mögliche Frequenz $\nu_1 = \frac{c}{2L}$

- Anzahl *J* der Moden bis zur Frequenz ν:

$$J = \frac{2L}{c} \nu = \frac{\nu}{\nu_1}$$

Moden sind gleichverteilt
in der Frequenz

$$\nu = j \frac{c}{2L} = j \nu_1$$



- Spektrale Modendichte *g(ν)*: Anzahl Moden *dJ* pro Frequenzintervall *dν*

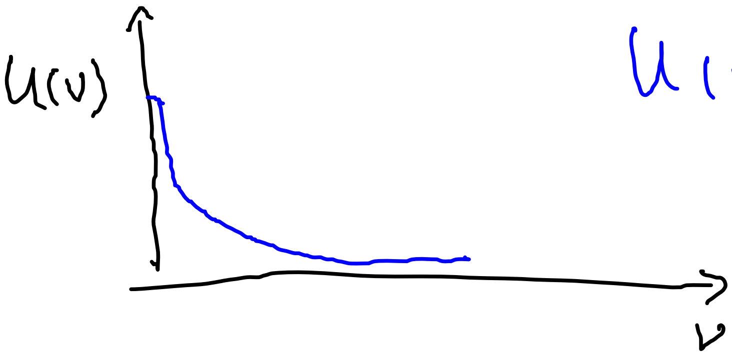
$$g(\nu) = \frac{dJ}{d\nu} = \frac{2L}{c} = \text{const.}$$

- (c) Energie $U(\nu)$ im Frequenzintervall $d\nu$ in statistischer Näherung (**Rayleigh-Jeans**):

$$U(\nu)\,d\nu = k_B T\,d\xi = k_B T\,\frac{2L}{c}\,d\nu$$

  - die Energie des 1D schwarzen Strahlers ist in dieser Näherung in der Frequenz gleichverteilt
  - sie ist proportional zur Temperatur T (gilt nur für $h\nu < k_B T$)

- Energie $U(\nu)$ im Frequenzintervall $d\nu$ nach **Planck**:



$$U(\nu)\,d\nu = h\nu\,f_{BE}\,d\xi$$

$$= h\nu\,\frac{1}{e^{h\nu/k_B T}-1}\,\frac{2L}{c}\,d\nu$$

für niedrige Frequenzen $h\nu < k_B T$

$$\approx h\nu\,\frac{1}{1+\frac{h\nu}{k_B T}-1}\,\frac{2L}{c}\,d\nu = k_B T\,\frac{2L}{c}\,d\nu$$

für hohe Frequenzen $h\nu > k_B T$

$$\approx h\nu\,e^{-h\nu/k_B T}\,\frac{2L}{c}\,d\nu$$

- Energiedichte $u(\nu)$ (1D, pro Länge L):

$$u(\nu)\,d\nu = \frac{U(\nu)}{L}\,d\nu$$

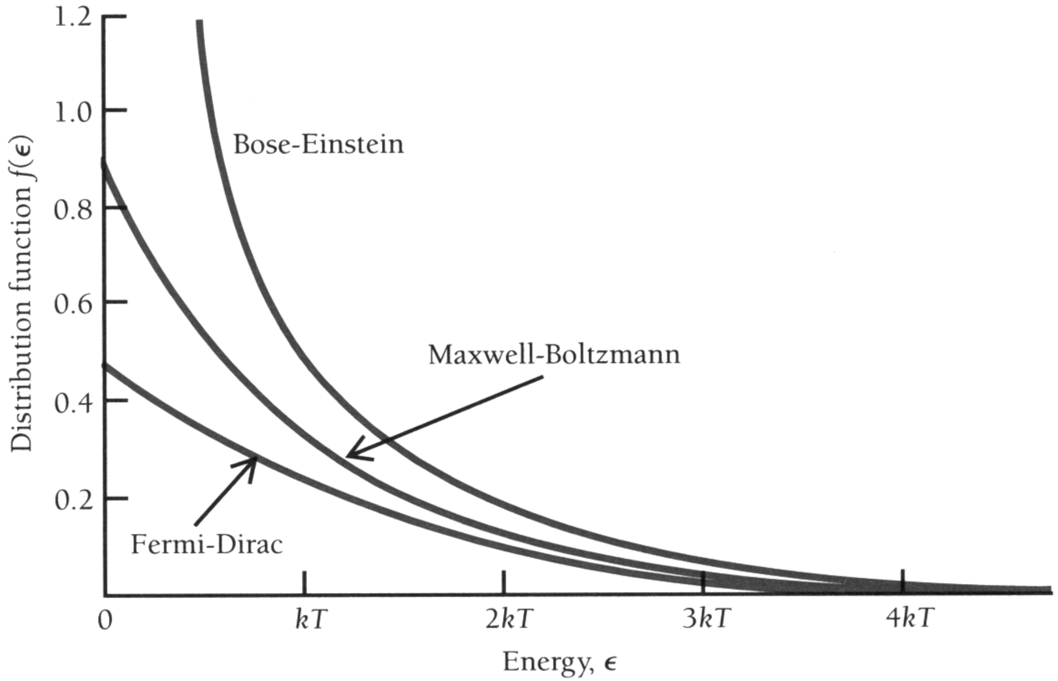
3.5.2 Quantenmechanische Energie und Besetzung der Moden

- Plancksche Hypothese: Die in jeder Mode gespeicherte Energie $E = n\,h\nu$ ist in Einheiten der Photonenergie $h\nu$ quantisiert.

- n ist die Anzahl der Photonen in einer Mode (vgl. quantenmechanischer harmonischer Oszillator, siehe spätere Vorlesung).

- Die Besetzung der verschiedenen zur Verfügung stehenden Moden des Hohlraums mit Photonen wird durch die Bose-Einstein Verteilungsfunktion f_{BE} beschrieben.

$$f_{BE}(\nu) = \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$



$$\varepsilon = \frac{h\nu}{kT}$$

3.5.3 Berechnung der Energiedichte für einen 3D schwarzen Strahler:

- Die Wände eines kubischen Hohlraums mit Volumen L^3 und Kantenlänge L seien perfekte Reflektoren.
- Dann muss die elektromagnetische Strahlung im Hohlraum stehende Wellen bilden.

- Resonanzbedingung entlang der Koordinate i.

$$j_i \frac{\lambda_i}{2} = L_i \qquad i = x, y, z \qquad j_i = 1, 2, 3, \ldots$$

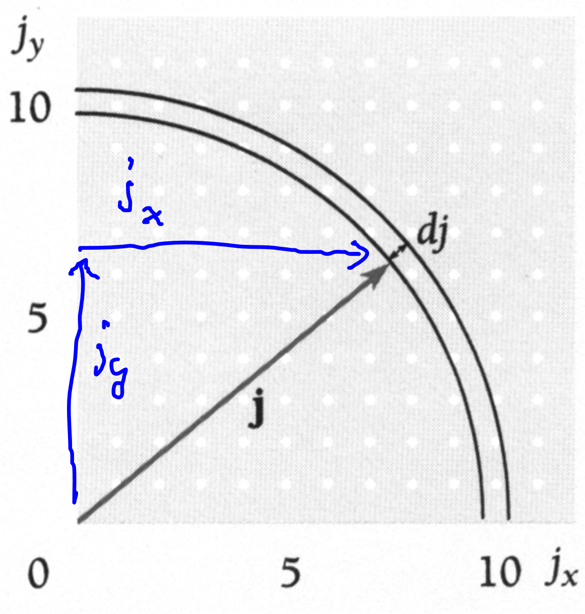
- Modenindex j_i zur Richtung $i = x, y, z$

$$j_i = \frac{2L_i}{\lambda_i} = \frac{2L_i}{c} \nu_i$$

- Für eine stehende Welle der Wellenlänge λ entlang einer beliebigen Richtung gilt (Resonanzbedingung)

$$j^2 = j_x^2 + j_y^2 + j_z^2 = \left(\frac{2L}{\lambda_j}\right)^2 = \left(\frac{2L}{c} \nu_j\right)^2$$

mit $j_x, j_y, j_z \in [1, 2, 3, ..]$



- Anzahl J der Moden mit Wellenlänge kleiner als λ_j (Frequenz groesser als ν_j)

$$J = \frac{1}{8} \, 2 \, \frac{4\pi}{3} j^3 = \frac{8\pi}{3} \frac{L^3}{c^3} \nu^3$$

positive j_i 2 Polarisationen

- Zahl der Moden $g(\nu)$ pro Frequenzintervall $d\nu$:

$$g(\nu) = \frac{dJ}{d\nu} = 8\pi \frac{L^3}{c^3} \nu^2$$

- Modendichte $G(\nu)$ (Zahl der Moden pro Volumen $V = L^3$) pro Frequenzintervall $d\nu$:

$$G(\nu) = \frac{g(\nu)}{L^3} = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2$$

- quadratische Abhängigkeit von der Frequenz ν
- unabhängig von der Form des Hohlraums

3.5.4 Rayleigh-Jeans Gesetz

Berechnung des Spektrums unter Annahmen der **klassischen Physik**: Jede Mode hat zwei Freiheitsgerade, die wie ein harmonischer Oszillator beschrieben werden können.

Gleichverteilungssatz: Im thermischen Gleichgewicht bei der Temperatur T trägt jede Mode die Energie $k_B T$ zur Gesamtenergie eines Systems bei.

Energiedichte $u(\nu)$ der elektromagnetischen Strahlung im Hohlraum pro Frequenzintervall $d\nu$:

$$u(\nu) = kT\, G(\nu) = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} kT$$

Dieses nach Rayleigh-Jeans benannte Gesetz für die Energiedichte eines schwarzen Strahlers ist nur für Frequenzen $h\nu$, die klein sind gegenüber der Temperatur kT, gültig.

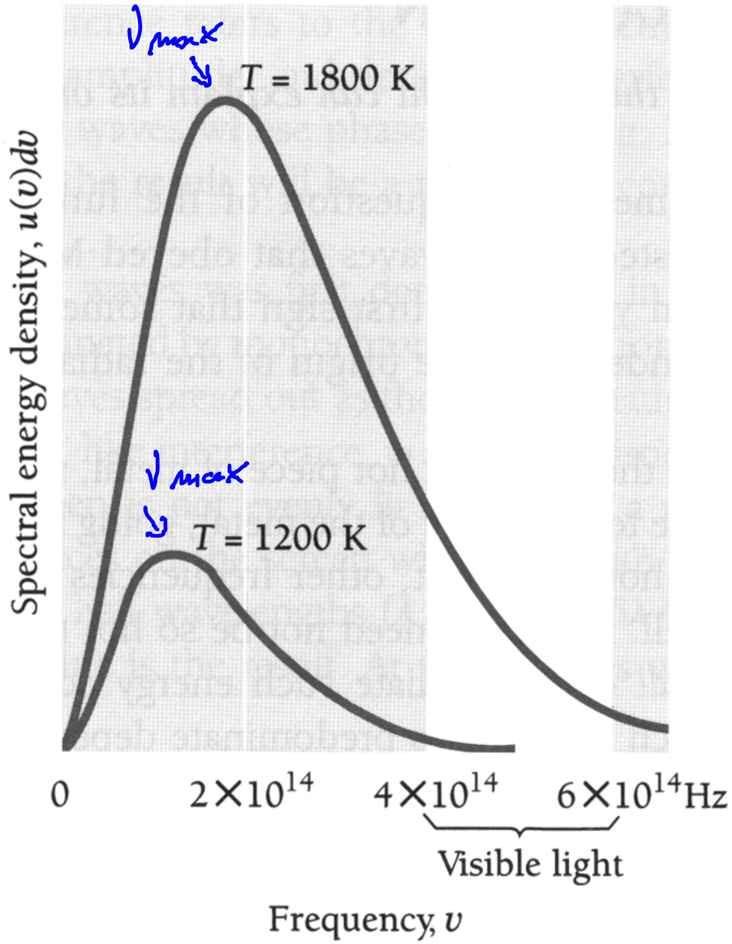
$u(\nu)$ divergiert für grosse Frequenzen ν (Ultraviolettkatastrophe) und muss daher falsch sein. Dieses Problem kann nur mit Hilfe der Quantenmechanik gelöst werden.

3.5.5 Plancksches Strahlungsgesetz:

- Die Gesamtenergiedichte $u(\nu)$ pro Frequenzintervall $d\nu$ ergibt sich dann zu:

$$u(\nu) = h\nu\, G(\nu)\, f_{BE}(\nu)$$

$$= \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}$$



Dies ist das **Plancksche Strahlungsgesetz.** Es beschreibt das Spektrum der elektromagnetischen Strahlung eines jeden Körpers (Sonne, Glühbirnen, ...) im thermischen Gleichgewicht bei der Temperatur T.

Eine weitere Herleitung dieses Gesetzes (nach Einstein) wird im Zusammenhang mit dem Laser diskutiert.

Charakteristische Eigenschaften des Spektrums:

- temperaturabhängiges Maximum der Energiedichte bei ν_{max}
- Anstieg von $u(\nu)$ proportional zu ν^2 bei niedrigen Frequenzen $\nu < \nu_{max}$
- exponentieller Abfall von $u(\nu)$ mit $e^{-\nu}$ bei hohen Frequenzen $\nu > \nu_{max}$
- temperaturabhängiges Maximum der Energiedichte bei ν_{max}
- Gesamtenergie integriert über alle Frequenzen skaliert mit T^4

3.5.6 Das Wiensche Verschiebungsgesetz:

- Bestimme die Wellenlänge bei der ein schwarzer Strahler ein Maximum an Energie abstrahlt.

  - drücke das Strahlungsgesetz in der Wellenlänge λ aus
  - finde Maximum

$$\frac{d u(\lambda)}{d\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \lambda = \lambda_{max}$$

Wiensches Verschiebungsgesetz:

$$\lambda_{max} T = \frac{hc}{4.965\, k} = 2.9 \times 10^{-3}\ \mathrm{mK}$$

- Maximum der Strahlungsemission verschiebt sich mit steigender Temperatur *T* zu niedrigeren Wellenlängen λ_{max}.

- Schwarze Strahler bei einigen 1000 Grad emittieren im sichtbaren Wellenlängenbereich, während Körper bei Raumtemperatur vorwiegend im Infraroten emittieren.

- Beispiel: Sonne

$$T = 6000\ \mathrm{K}$$

$$\lambda_{max} = 480\ \mathrm{nm}$$

- Anwendung Pyrometrie: Bestimmung der Temperatur eines Objekts aus Messung des Strahlungsspektrums

3.5.7 Stefan-Boltzmann Gesetz

Bestimme die gesamte Energiedichte eines schwarzen Strahlers bei Temperatur *T*

$$u = \int_0^\infty u(\nu)\, d\nu = \frac{8\pi^5 k^4}{15 c^3 h^3} T^4 = a T^4$$

- mit der universellen Konstanten *a*
- starke Abhängigkeit von der Temperatur *T*

Die von einem Objekt pro Zeiteinheit und Oberfläche abgestrahlte Energie *R* ist proportional zu T^4. Diese Abhängigkeit wird **Stefan-Boltzmann Gesetz** genannt.

$$R = e \sigma T^4$$

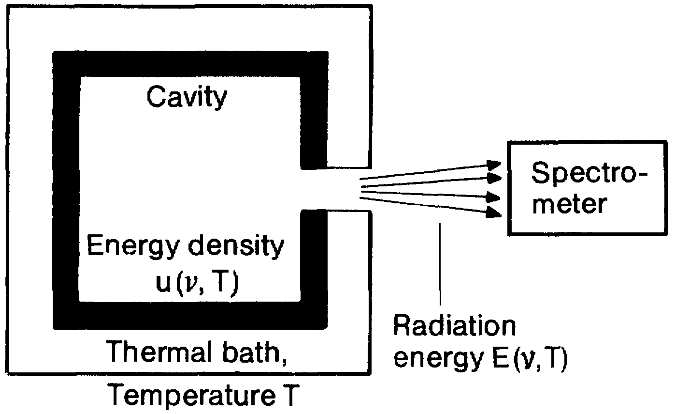
mit der Stefan Konstanten σ:

$$\sigma = \frac{ac}{4} = 5.67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$$

und dem Emissionskoeffizienten *e* des Strahlers, der von *e* = *0.07* für polierten Edelstahl bis zu *e* = *0.97* für matte schwarze Oberflächen variiert.

Vorlesungsexperiment: Leslie-Würfel

3.5.8 Energiedichte *u(ν) dν* und Strahlungsflussdichte *P(ν) dν*



- Definition: Energiedichte $u(\nu)\, d\nu$

  $u(\nu)\, d\nu$ = Strahlungsenergie im Frequenzbereich $\nu \ldots \nu + d\nu$ pro Volumen V

- Definition: spektrale Energiedichte $u(\nu)$:

  $u(\nu)$ = Strahlungsenergie pro Volumen V und pro Frequenzintervall $d\nu$

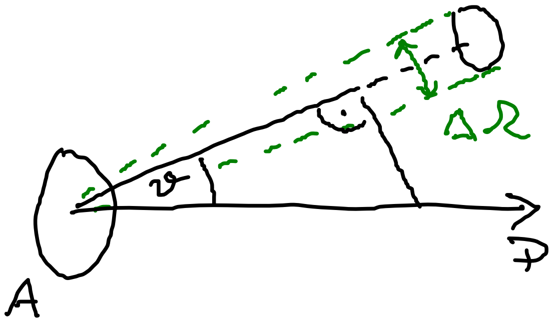
- Messgrösse: Strahlungsflussdichte $P(\nu)$

  $P(\nu)\, d\nu$ = Strahlungsleistung im Frequenzbereich $\nu \ldots \nu + d\nu$ pro Raumwinkel und pro Fläche

  Energie E die von einem schwarzen Strahler mit Fläche A pro Zeitintervall Δt in ein Raumwinkelelement $\Delta\Omega$ unter einem Winkel θ zur Flächennormalen emittiert wird.

$$E(\nu)\, d\nu = u(T,\nu)\, d\nu \;\; c\, \Delta t\, A \cos\vartheta \;\; \frac{\Delta\Omega}{4\pi}$$

$$P(\nu)\, d\nu = \frac{E(\nu)\, d\nu}{\Delta t}$$

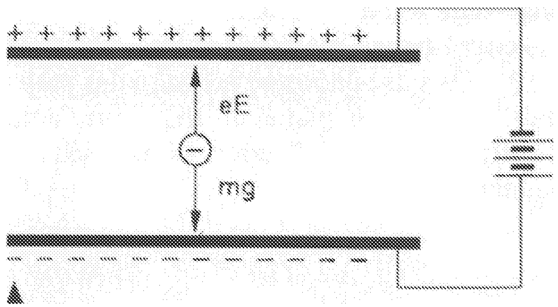


4. Das Elektron

Erzeugung von freien Elektronen:
- Photoeffekt
- Thermische Emission (Glühemission)

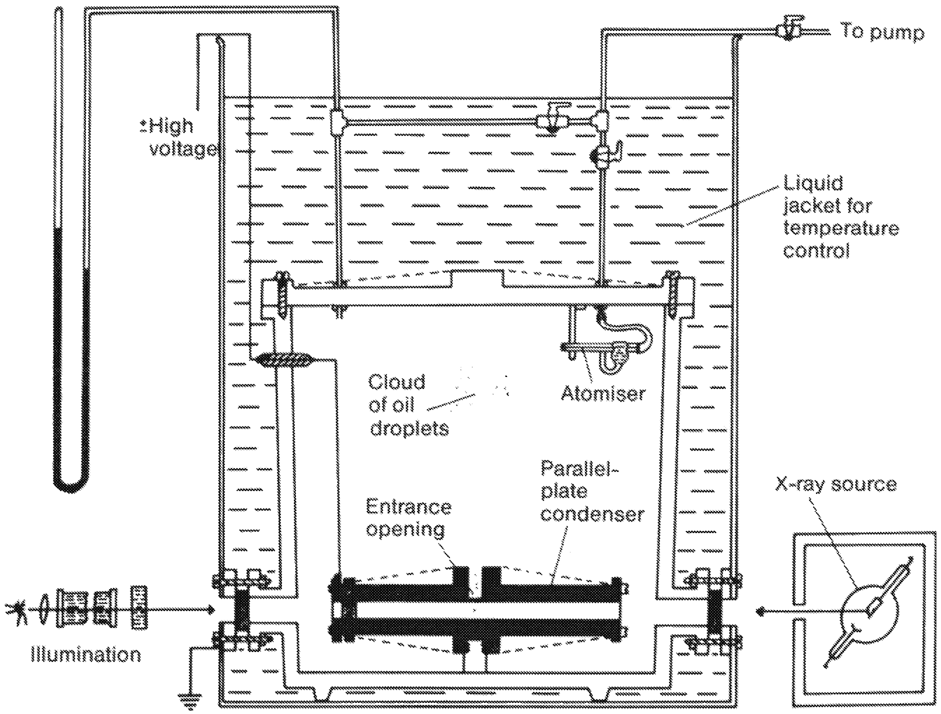
Manipulation von Elektronen:
- Beschleunigung, Ablenkung in elektrischen und magnetischen Feldern

4.1 Ladung des Elektrons



Versuch von Millikan: Bestimmung der Ladung des Elektrons

Elektrisch aufgeladene Öltröpfchen in einem elektrischen Feld



$$mg = eE$$

- Kompensation der Gravitationskraft und der Coulomb-Kraft eines geladenen Teilchens im elektrischen Feld eines Kondensators.

- Ladung *e* des Elektrons:

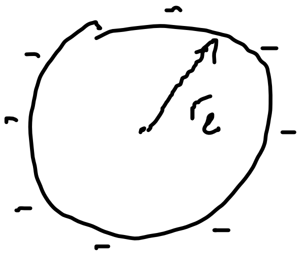
  $e = -1.602\ 10^{-19}\ C$

4.2 Die Grösse des Elektrons

- Bestandteil des Atoms, daher deutlich kleiner als das Atom selber

- Definition des klassischen Elektronenradius
  - e^- als Kugel mit Radius r_e
  - Ruheenergie $E = m_0\,c^2$ sei identisch der elektrostatischen Energie der Oberflächenladung

$$W = \int V\,dQ = \int \frac{Q}{C}\,dQ = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{C}$$



$$\rho_A A = -e$$

  - Kapazität $C = 4\,\pi\,\varepsilon_0\,r_e$

$$\frac{1}{2}\,\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_e} = m_0 c^2$$

  - klassischer Elektronenradius r_e

$$r_e = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 m_0 c^2} \approx 1.9\ 10^{-15}\,m$$

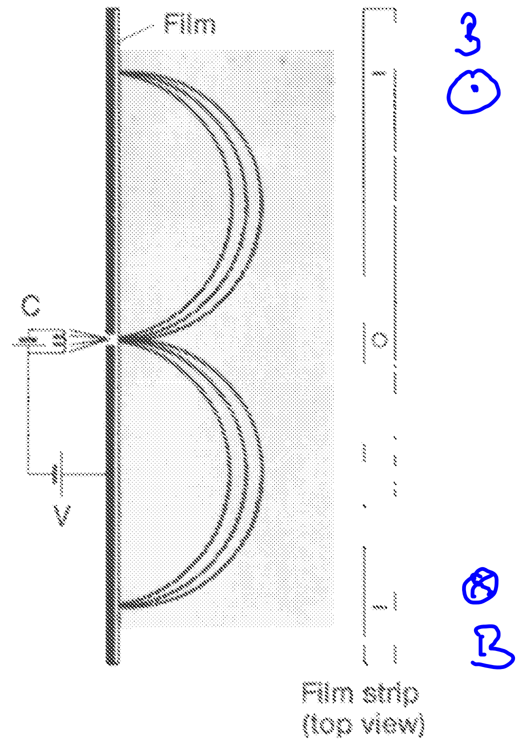
- Bestimmung des Elektronenradius durch Streuexperimente
  - keine Abweichung der e^-/e^- Wechselwirkung vom Coulomb-Gesetz selbst bei kleinen Abständen
  - Folgerung: Elektronen sind innerhalb der experimentellen Genauigkeit punktförmige Teilchen

4.3 Spezifische Ladung des Elektrons *e/m*

- Bestimmung von *e/m* des Elektrons analog zu Massenspektroskopie Experimenten mit Ionen
- Verwendung von elektrischen und magnetischen Feldern.
- allgemeine Bewegungsgleichung:

$$\vec{F} = m\dot{\vec{v}} = -e\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$$

Zyklotronbewegung des Elektrons



- kreisförmige Bahn in Feld *B* senkrecht zur Bewegungsrichtung *v* des Elektrons

$$\frac{mv^2}{r} = -e\left|\vec{v}\times\vec{B}\right|$$

- Zyklotronradius $r = \dfrac{mv}{eB}$
- Beschleunigung des e- $\frac{1}{2}mv^2 = eV \Rightarrow v^2 = \dfrac{2eV}{m}$
- spezifische Ladung $\dfrac{e}{m} = \dfrac{2V}{r^2B^2}$

4.4 Die Masse des Elektrons

- Bestimmung der Masse *m* aus der spezifischen Ladung *e/m*

$m_0 = 9{,}1 \; 10^{-31}$ kg

$m_0 = 511$ keV

- relativistische Masse des Elektrons

$$m(v) = m_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- Beispiel:

kinetische Energie	Geschwindigkeit	Massenzunahme
1 keV	$\frac{v}{c} \approx 0.063$	$\frac{m - m_0}{m_0} \approx 4 \cdot 10^{-3}$
1 MeV	$\frac{v}{c} \approx 0.942$	$\frac{m - m_0}{m_0} \approx 2$

4.5 Welleneigenschaften von Elektronen

- Bisher: Untersuchung der Teilcheneigenschaften von Wellen

- Elektronen können aber auch Welleneigenschaften zeigen: Beugung, Interferenz

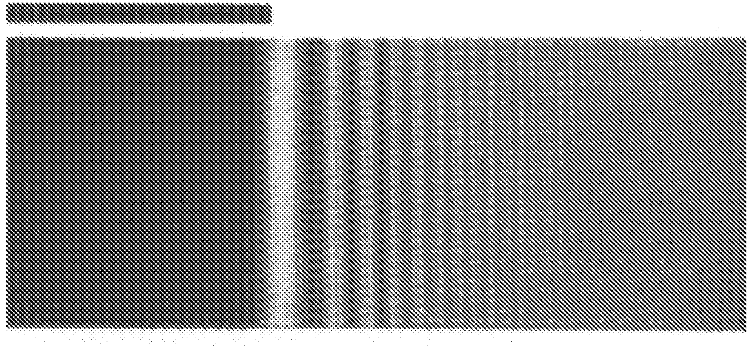
- Bragg-Streuung: Ähnlich wie Röntgenstrahlen können langsame Elektronen Bragg-Interferenzen bei Streuung an Oberflächen zeigen.

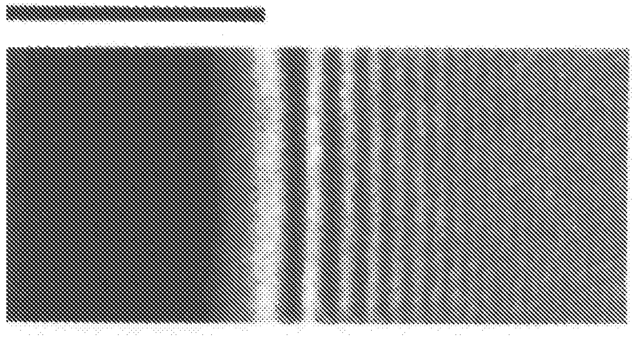
Moderne Elektronenbeugungsmessungen

- Elektronenbeugung wird in der Festkörperphysik zur Untersuchung der Kristallstruktur verwandt.
- Die Technik ist besonders gut für Oberflächen geeignet.

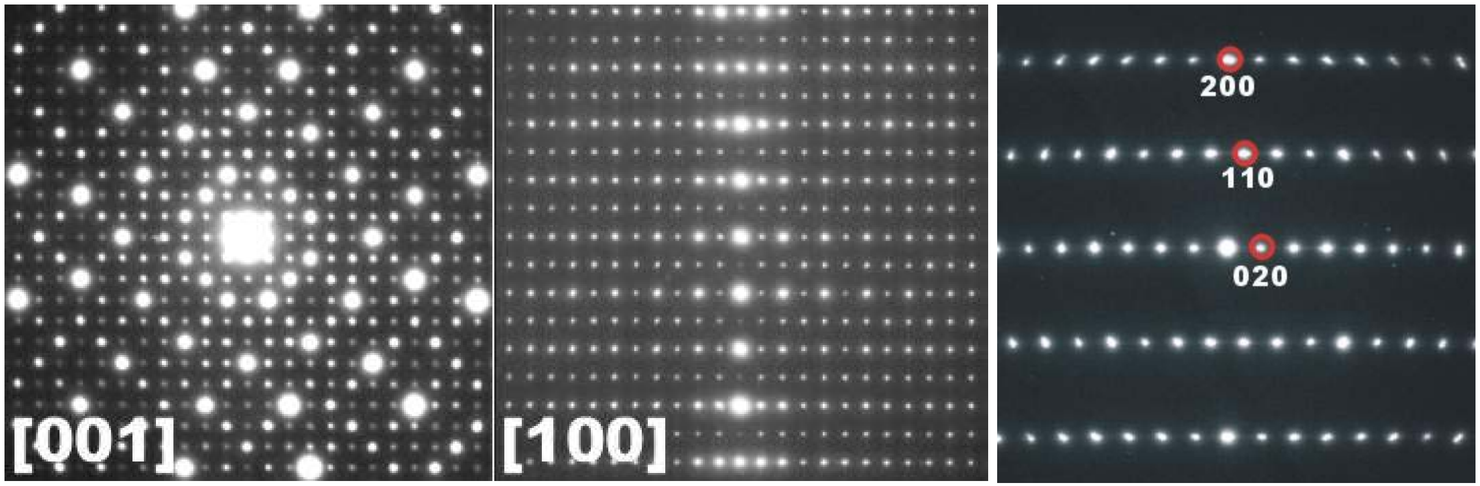
- Beispiel: Streumuster von Elektronen an Einkristallen

Beugung von Licht an einer Kante





Beugung von Elektronen (E_{kin} = 34 keV) an der Kante einer Al-Folie



weiter Abbildungen:
http://www.microscopy.ethz.ch/
http://www.emez.ethz.ch/

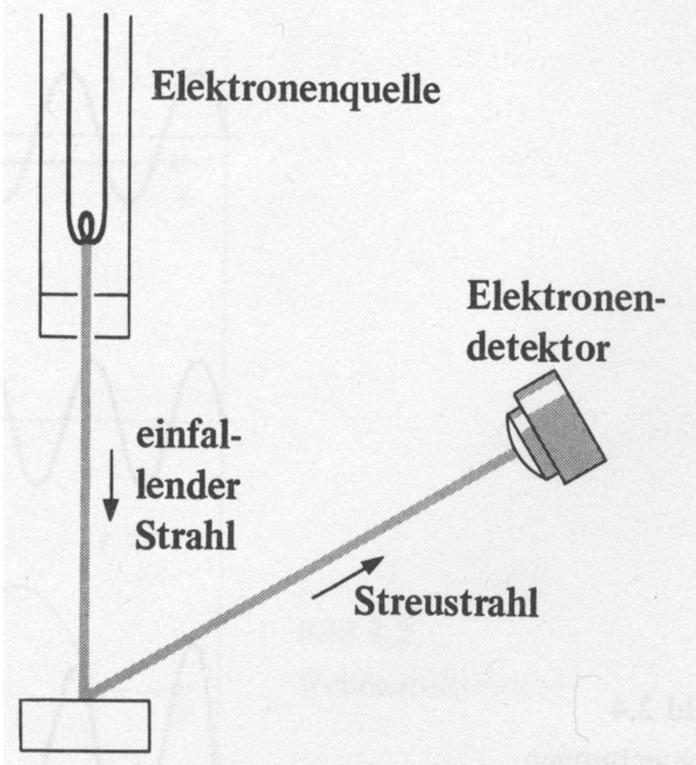
4.6 Elektron Streuung: Experiment von Davisson und Germer

- Bestätigung des Wellencharakters von Teilchen (deBroglie Wellen) in Streuexperimenten mit Elektronen durch Davisson und Germer und unabhängig durch Thomson (1927)

Nobelpreis in Physik (1937)

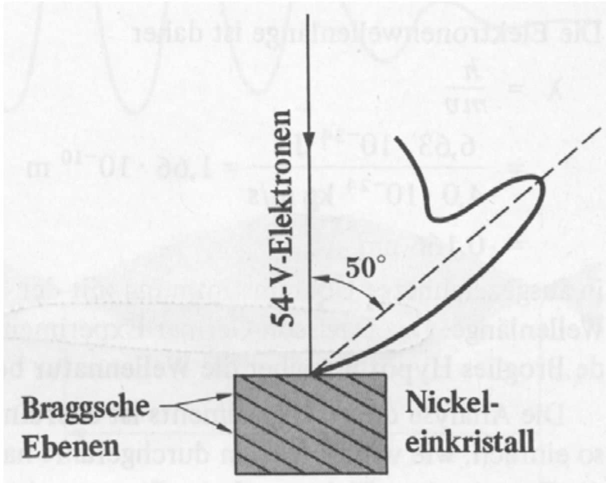
Clinton Joseph Davisson
George Paget Thomson

"for their experimental discovery of the diffraction of electrons by crystals"



- klassische Erwartung: Die Intensität der gestreuten Elektronen sollte nur schwach von Streuwinkel und der Energie der einfallenden Elektronen abhängen.

- Beobachtung: starke Energie und Winkelabhängigkeit der Streuung



Nickeleinkristall mit durch Aufheizen oxidfreier einkristalliner Oberfläche

4.7 deBroglie Wellen

Elektronen (und alle anderen massiven Teilchen) verhalten sich wie Wellen mit der Wellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}}$$

Abhängigkeit der Elektronwellenlänge von der Energie

$$\lambda = \frac{12.3}{\sqrt{V}}\ \mathring{A}$$

zum Beispiel bei *54 V*: λ *= 0.167 nm;*
entspricht typischen Gitterkonstanten *a*

Bragg-Bedingung für Materiewellen

$$n\lambda = 2a\sin\Theta$$

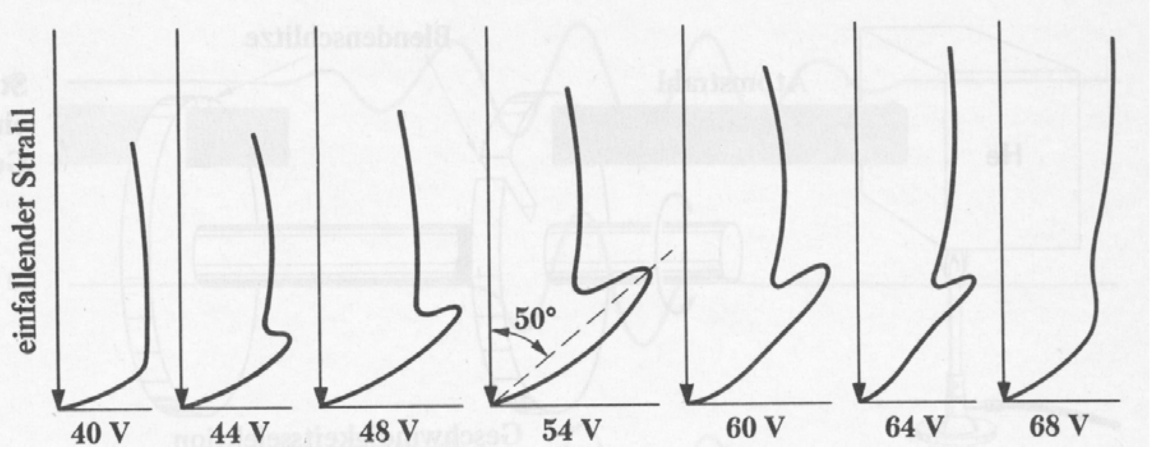
Winkel unter dem konstruktive Interferenz auftritt:

$$\Theta = \arcsin\frac{n\lambda}{2a}$$

$$= \arcsin\frac{h}{2a\sqrt{E_{kin}\,2m_0}}$$

Davisson/Germer Experiment:

lange Wellenlänge
grosser Streuwinkel



kurze Wellenlänge
kleiner Streuwinkel