

## 6. Unschärferelation & Doppelspalt

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Eine der zentralen Eigenschaften der Quantenmechanik ist die Unschärfe in der Bestimmung von konjugierten Variablen:

- $\mathbf{x} - \mathbf{p}$  (Ort - Impuls)
- $L_x - L_y$  (Komponenten des Bahndrehimpuls)
- $\sigma_x - \sigma_y$  (Komponenten des Spins)
- $N - \phi$  Teilchenzahl - Phase
- $E - t$  (Energie - Zeit; unterscheidet sich aber von den obigen Beispielen, da Energie und Zeit keine konjugierten Variablen sind -  $t$  ist ein Parameter)

### **Komplementaritätsprinzip:**

Die dynamischen Variablen eines jeden Freiheitsgrad bilden ein Paar von komplementären Variablen.

einfacher: Wie auch immer ein System präpariert wird, es gibt immer eine Messung die völlig unbestimmt ist.

*Es ist nicht möglich, eine Vielzahl von Mikroobjekten so zu präparieren, dass deren Ortsstreuung und deren Impulsstreuung gleichzeitig beliebig klein sind. Die HEISENBERG'sche Unschärferelation  $\Delta x \cdot \Delta p \geq h/4\pi$  setzt der gleichzeitigen Verringerung eine Grenze.*

## 6.1. Unschärferelation Ort - Impuls

### 6.1.1. Beugung am Spalt

- Elektronen im bestimmten Impuls  $p$  vor dem Spalt
- Bestimmung des Ortes der einfallenden Welle (Teilchen) mit Genauigkeit  $\Delta x$
- Wie groß ist die Genauigkeit in der Bestimmung des Impulses?
- Wellen werden an Objekten gebeugt, die in etwa von der selben Größenordnung wie die Wellenlänge sind

- Breite des Beugungsmuster:  $\theta \approx \frac{\lambda}{\Delta x}$ ,  $k = 2\pi/\lambda$

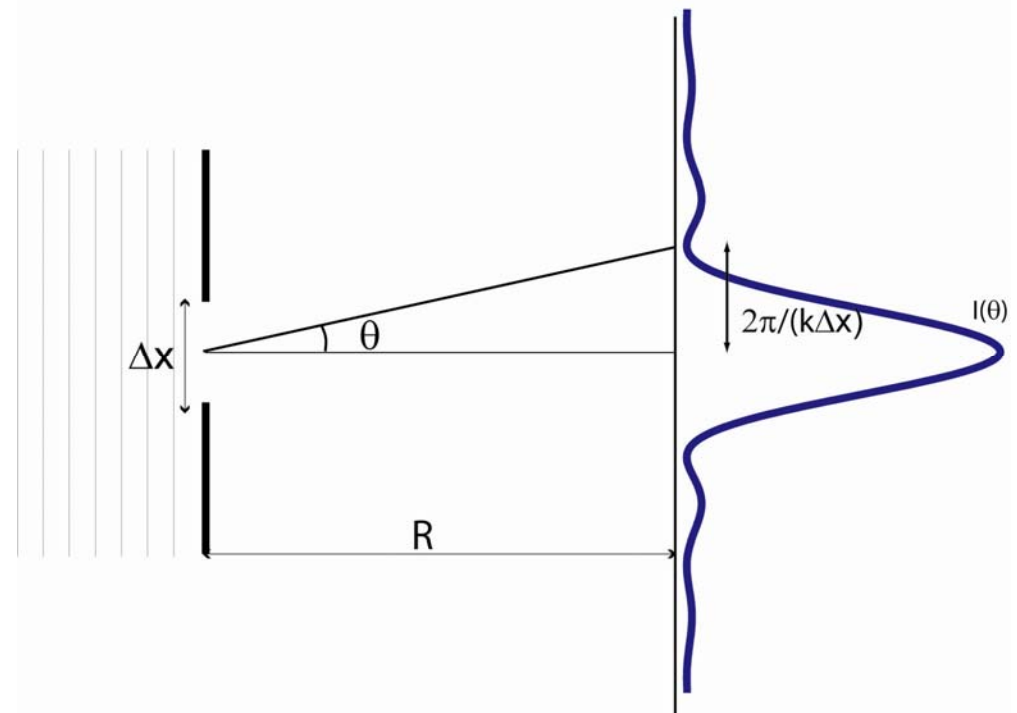
- d.h.: transversaler Impulsübertrag  $\frac{\Delta p}{p} \approx \theta$

- $$\Delta p \approx p\theta \approx \frac{h}{\lambda}\theta = \frac{h}{\lambda} \frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{h}{\Delta x}$$

$$\Delta x \Delta p \geq h$$

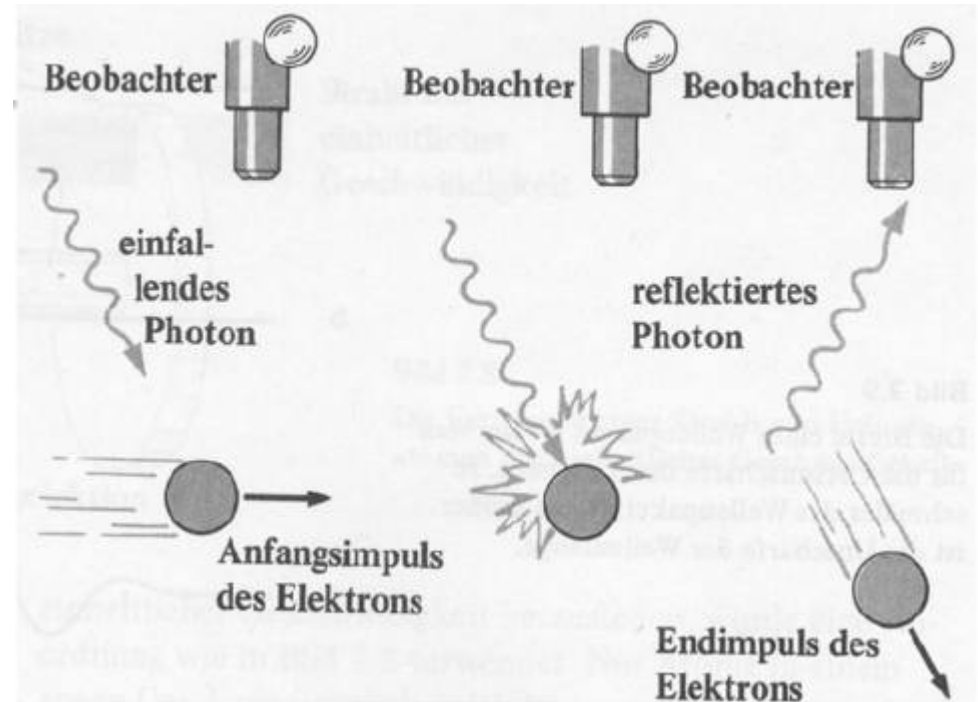
- **Je genauer man  $\Delta x$  messen will, desto schlechter ist die Impulsauflösung!**

$$I(\theta) = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \quad \beta = \frac{k\Delta x}{2} \sin \theta$$



## 6.1.2. Gedankenexperiment - Heisenberg Mikroskop

- Versuch, Position eines Elektron durch Beleuchtung mit hinreichend kurzwelligem Licht zu bestimmen, führt unweigerlich zu einer Unschärfe seines Impulses nach der Messung
- Impuls Photon:  $p = h/\lambda$
- Änderung des Elektronenimpuls kann von der Größenordnung des Photonenimpuls sein:  $\Delta p = h/\lambda$
- Die Messgenauigkeit eines Mikroskops hängt von der Wellenlänge ab,  $\Delta x \sim \lambda$
- Unschärfe:  $\Delta x \Delta p \geq h$
- **Messprozess ist nicht entscheidend, Ort und Impuls des Elektrons sind von Natur aus mit einer Unschärfe behaftet.**



### 6.1.3. Elektronenbahnen um Kern - Unschärferelation liefert stabile Atome

- Elektron in Atomhülle hat eine **(klassische)** Energie von

$$E_{\text{klass}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- Virialsatz aus der klassischen Mechanik:  $E_{\text{klass}} = -\frac{e^2}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0 r}$

- Für  $r$  gegen 0:  $E_{\text{klass}}$  gegen  $-\infty$  und folglich existiert keinen kleinsten Bahnradius.

- naive **quantenmechanische** Betrachtung ergibt mit  $\Delta p \sim p$  und  $\Delta x \sim r$ , d.h.  $p \sim h/r$

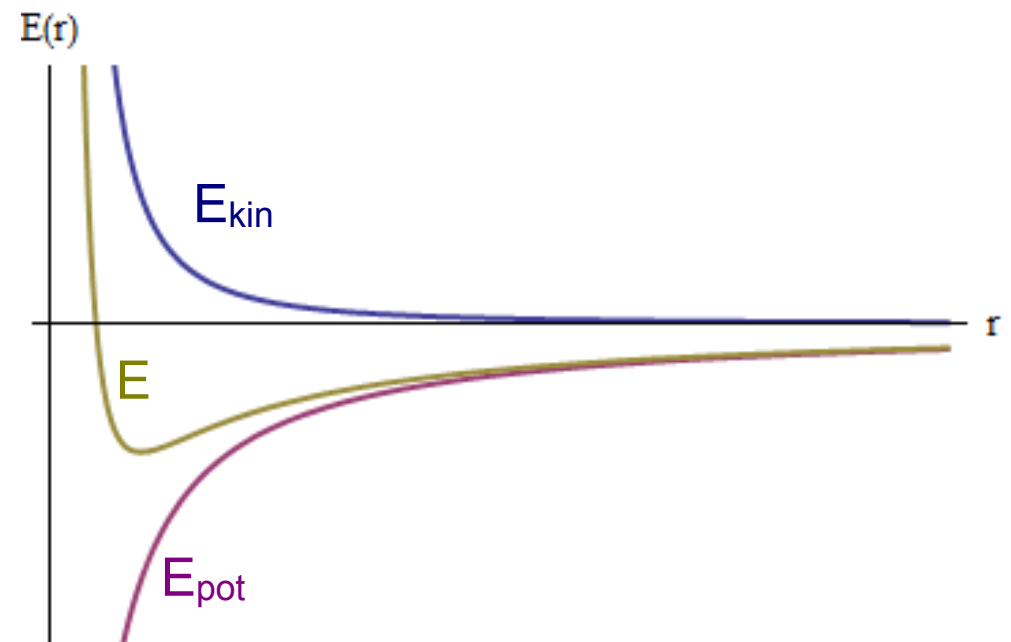
$$E = \frac{1}{2m_e} \frac{h^2}{r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \rightarrow \text{Min.} \neq 0$$

- $r_{\text{min}}$  ist folglich gegeben durch

$$r = \frac{h^2 4\pi\epsilon_0}{m_e e^2}$$

- Ersetzen wir  $h \rightarrow \hbar$

- Bohrradius (siehe später)  $a_0 = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{m_e e^2}$



## 6.1.4. Unschärfe in Energie und Zeit - Linienbreite eines Photonenübergangs

$$\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar$$

- Energieänderung eines Systems  $E(t)-E(t')$  ist von der Größenordnung  $\hbar/\Delta t$  ( $\Delta t = t-t'$ )
- *anders*: Energieerhaltungssatz kann in der Quantenmechanik nur mit einer Genauigkeit von  $\hbar/\Delta t$  überprüft werden.
- aber: Energie kann zu jedem beliebigen Zeitpunkt mit beliebiger Genauigkeit gemessen werden (im Gegensatz zu Ort und Impuls)
- **Beispiel :**
  - Atom im angeregten Zustand
  - genaue Zeit des Zerfalls zufällig, Lebensdauer  $\Delta t \sim \tau = 1/\gamma$
  - Strahlungsamplitude:

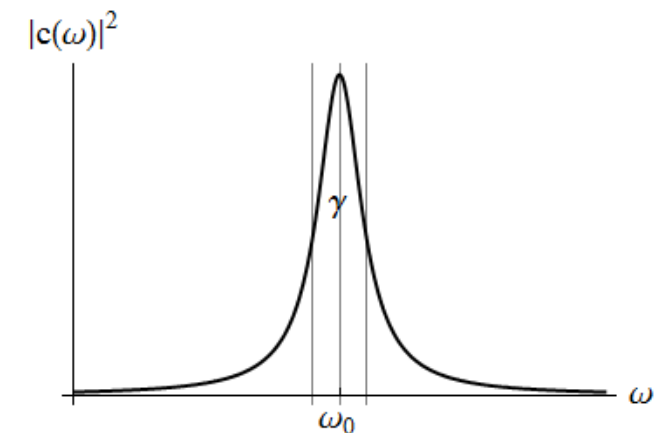
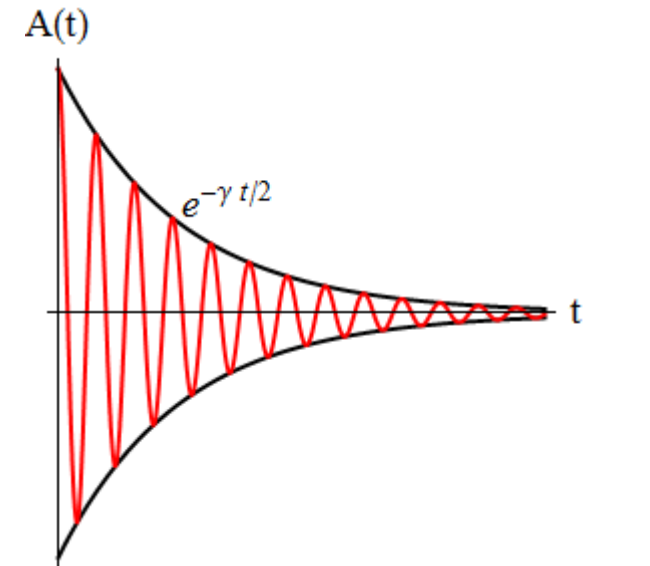
$$A(t) = A(0)e^{-\gamma t/2} \cos \omega_0 t$$

- Mittelung über Atomensemble: exponentieller Zerfall (Rate  $\gamma$ )  
( $dN/dt = -\gamma \rightarrow N(t) = N(0) e^{-\gamma t}$ )
- damit verbundene Energieunschärfe des emittierten Photons

$$\Delta E \approx \hbar/\tau$$

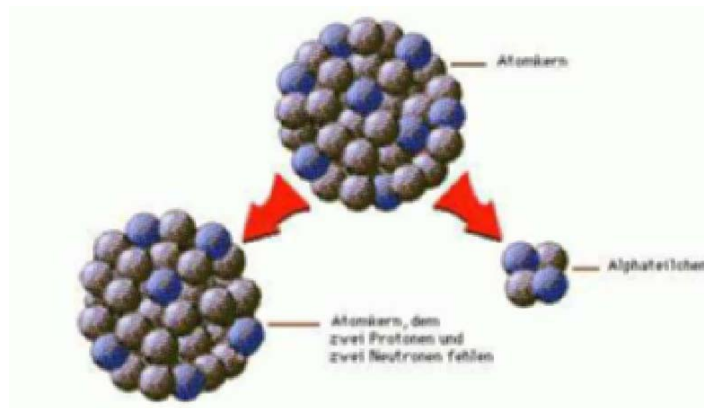
- natürliche Linienbreite  $\Delta \omega = 1/\tau = \gamma$
- Lorentz-Kurve im Frequenzraum

$$|c(\omega)|^2 = A(0)^2 \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2}$$



**langlebiger Atomzustand  
→ schmales Frequenzband**

## 6.1.5. Alpha Zerfall - Tunneleffekt



- **Klassisch:**  $\alpha$  - Teilchen bekommen kinetische Energie aufgrund der Coulomb-Abstossung von Kern mit Radius

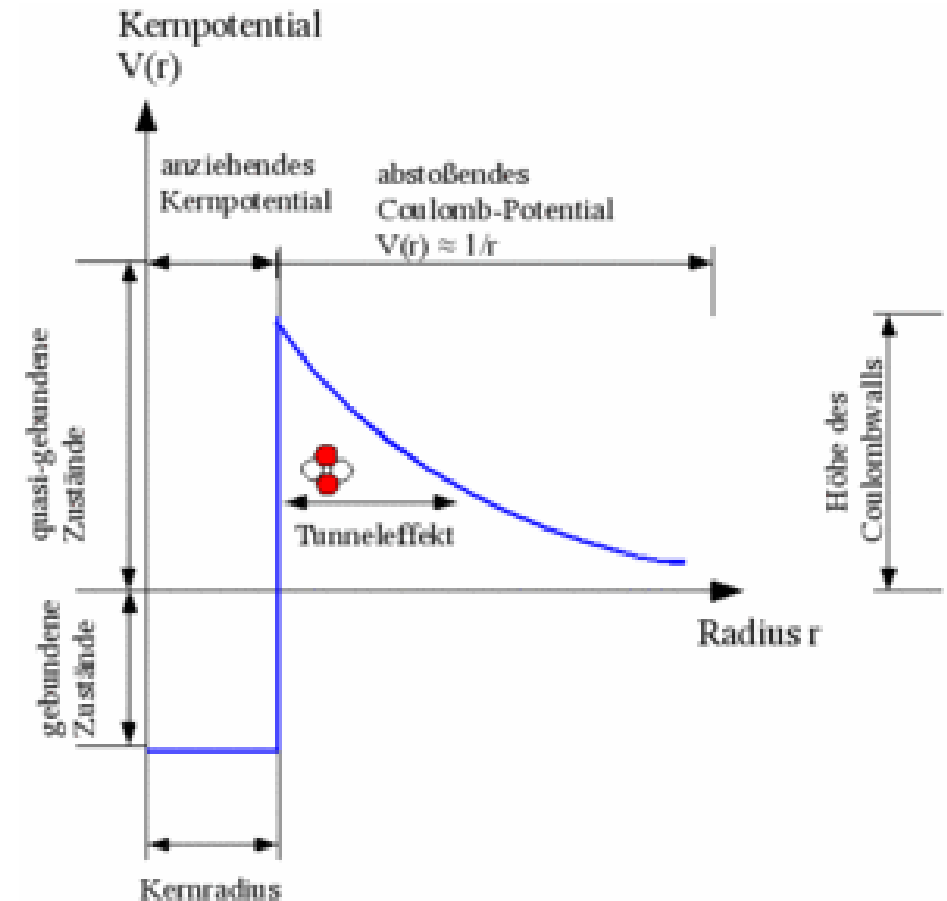
$$r_0 \approx 1.5 \cdot 10^{-15} A^{1/3} \text{ m}$$

wobei  $r_0$  aus Rutherford-Streuexperimenten abgeschätzt wird

- **Beobachtung:** Energie der  $\alpha$  - Teilchen geringer, d.h. Radius der Emission größer
- **Quantenmechanisch - Tunneleffekt:**

$$\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar$$

- für kurze Zeit steht mehr Energie zur Verfügung
- $\alpha$  - Teilchen kann Barriere durchtunneln
- genaue Berechnung mittels Schrödingergleichung



### 6.1.5. Klassische und Quantenmechanik

Warum spielt die Unschärferelation in der Alltagswelt keine wesentliche Rolle?

$$\hbar = 1.06 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

$$\Delta v = \frac{\hbar}{2m\Delta x} \approx \frac{10^{-25}}{m} \quad \text{für} \quad \Delta x = 10^{-9}$$

Die Bestimmung des Ortes eines Teilchens mit Masse 1g auf 1nm genau erlaubt die gleichzeitige Bestimmung seiner Geschwindigkeit mit einer Genauigkeit von  $10^{-22}$  m/s.

Erst bei der Betrachtung von Systemen von der Größenordnung einzelnen Atomen ( $m \sim 10^{-26}$  kg) kommt die Unschärferelation ins Spiel.

Quanteneffekte vernachlässigbar, sobald  $\hbar \rightarrow 0$   
(Übergang Quantenmechanik - Klassische Mechanik)

## 6.1.6. Vorschau: Mathematischer Formalismus der Quantenmechanik

- Unschärferelation muss sich in der mathematischen Beschreibung des Systems widerspiegeln.
- **Klassische Mechanik:** Ort ( $x$ ) und Impuls ( $p$ ) sind zu jedem Zeitpunkt eindeutig bestimmbare Größen (Observablen)
  - Beschreibung: Reelle Zahlen
- **Quantenmechanik:** Die Unschärfe in  $x$  ergibt eine minimale Unschärfe in  $p$  (Graphik Unschärfe)
  - Beschreibung: **Operatoren/Matrizen** - zu jeder dynamischen Variable (Ort, Impuls, Drehimpuls,...) gibt es einen linearen Operator, dessen Eigenwerte die möglichen Werte der Variable angibt.

$$\hat{x}|\psi(t)\rangle = x|\psi(t)\rangle$$

- $|\psi(t)\rangle$ ... Wellenfunktion = Zustand des Systems
- Unschärferelation folgt aus Nicht-kommutativität der Operatoren:

$$AB - BA \equiv [A, B] = iC \quad \rightarrow \quad \Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle C \rangle|$$

$$A = \hat{x}, \quad B = \hat{p} : \quad [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \rightarrow \quad \Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

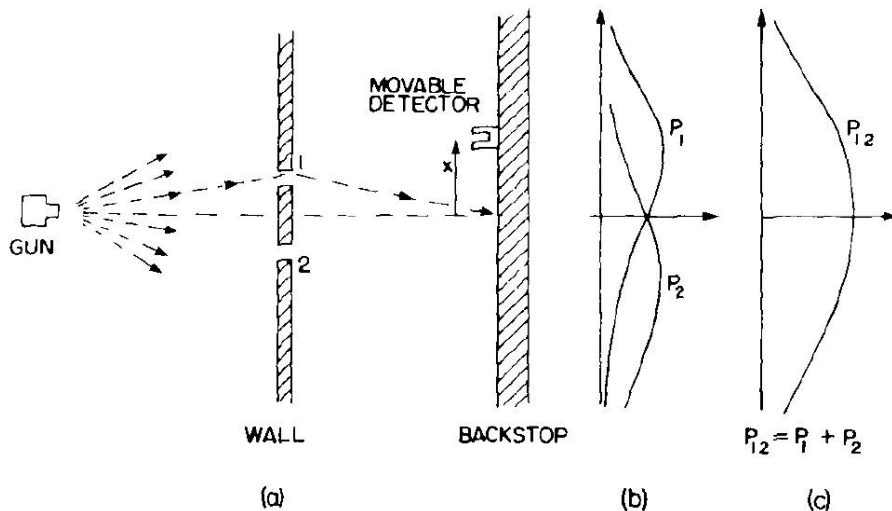


## 6.2. Young Doppelspalt - Welle-Teilchen Dualismus

"We choose to examine a phenomenon which is impossible, absolutely impossible, to explain in any classical way, and which has in it the heart of quantum mechanics. In reality, it contains the only mystery." (Feynman)

Literatur: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. L. Sands, „The Feynman Lectures on physics“, Vol. III: Quantenmechanik“, Addison Wesley, Reading (Mass.) (1965)

### 6.2.1. Doppelspaltversuch mit klassischen Teilchen (Kugeln)



$P_1$ ... Auftreffwahrscheinlichkeit von Kugeln durch Spalt 1

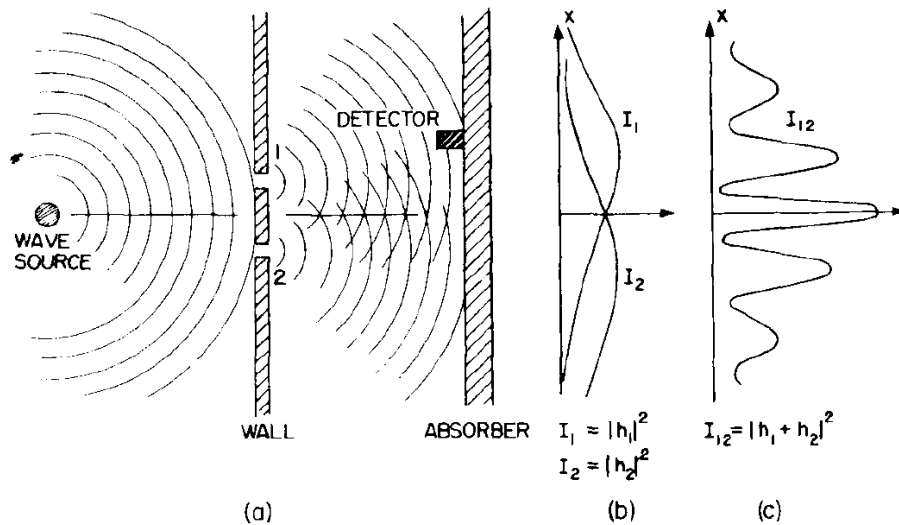
$P_2$ ... Auftreffwahrscheinlichkeit von Kugeln durch Spalt 2

$P_{12}$ .. Auftreffwahrscheinlichkeit von Kugel entweder durch Spalt 1 oder Spalt 2

- Einzelne Kugeln werden detektiert (click,..., click,click,...)
- Die Wahrscheinlichkeiten beider Möglichkeiten werden addiert:  
 $P_{12} = P_1 + P_2$

- **keine Interferenz**

## 6.2.2. Doppelspaltversuch mit (klassischen) Wellen



$h_1 e^{i\omega t} \dots$  Wellenfunktion von Spalt 1

$h_2 e^{i\omega t} \dots$  Wellenfunktion von Spalt 2

Intensitäten (Quadrat der Amplituden):

$I_1 = |h_1|^2 \dots$  Intensität von Welle durch Spalt 1

$I_2 = |h_2|^2 \dots$  Intensität von Welle durch Spalt 2

$I_{12} = |h_1 + h_2|^2 \dots$  Intensität von Welle durch Spalt 1 & 2

$$I_{12} = |h_1 + h_2|^2 = |h_1|^2 + |h_2|^2 + |h_1| |h_2| \cos \delta$$

- Intensität ist **kontinuierlich**, keine Einzelereignisse
- Die Amplituden beider Pfade werden addiert und anschließend quadriert.
- **Interferenz**

### 6.2.3. Doppelspaltversuch mit Materiewellen

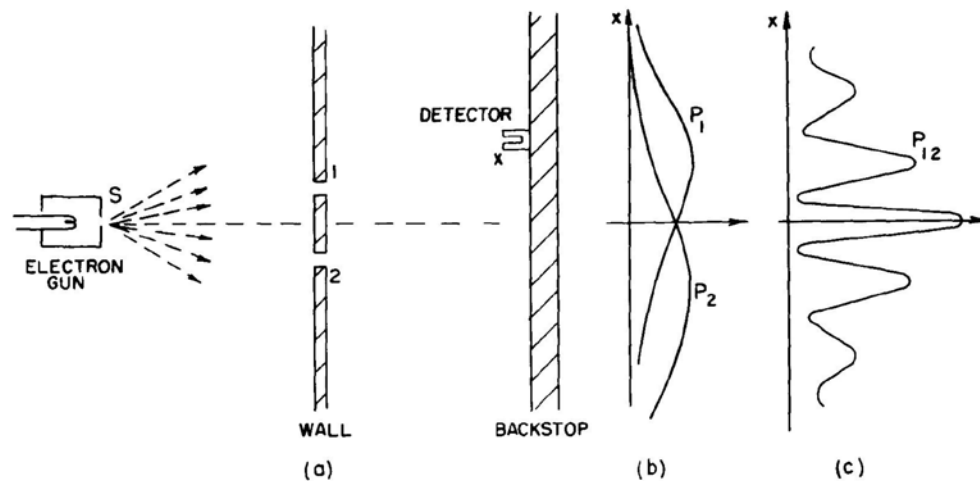


Fig 3-1. Interference experiment with electrons.

$\Psi_i e^{i\omega t} = \dots$ Wellenfunktion von Elektronen durch Spalt  $i$

$P_1 = |\Psi_1|^2 \dots$ Auftreffwahrscheinlichkeit für Elektronen durch Spalt 1

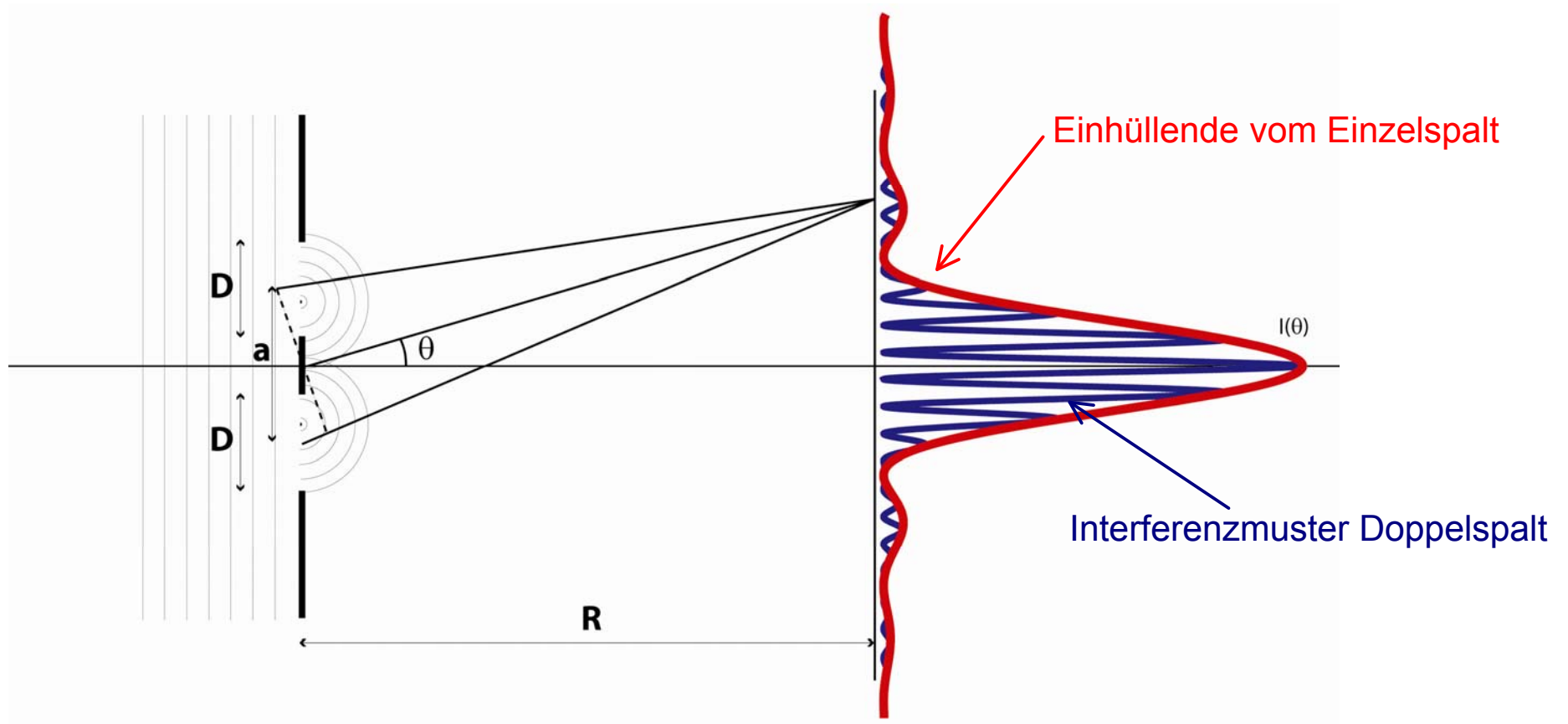
$P_2 = |\Psi_2|^2 \dots$ Auftreffwahrscheinlichkeit für Elektronen durch Spalt 2

Auftreffwahrscheinlichkeit für Elektronen durch Spalt 1 + Spalt 2:

$$P_{12} = |\Psi_1 + \Psi_2|^2 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + 2 |\Psi_1| |\Psi_2| \cos\delta$$

- **Einzelne** Elektronen werden detektiert (click, click,...., click,.... - **Teilcheneigenschaft**)
- **Interferenzterm**  $\Psi_1^* \Psi_2 = |\Psi_1| |\Psi_2| \cos\delta$  führt zu konstruktiver bzw. destruktiver **Interferenz (Welleneigenschaft)**
- **Regel:** Die Amplituden der Wellen zu allen möglichen Pfaden werden addiert und das Betragsquadrat davon ergibt die Aufenthaltswahrscheinlichkeit.

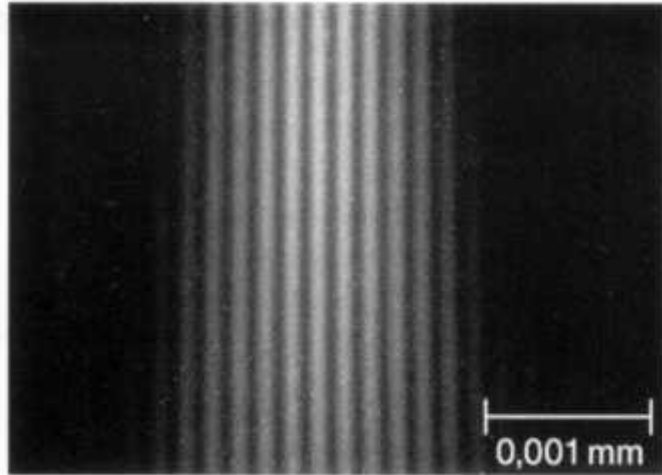
## 6.2.4. Mathematische Beschreibung



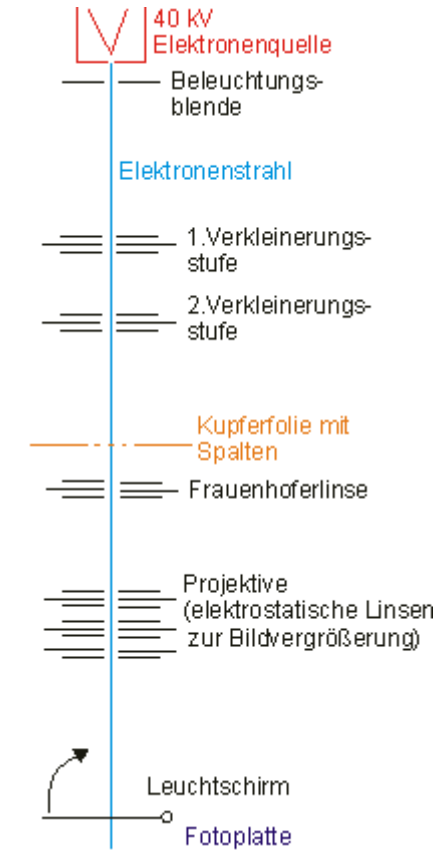
$$I(\theta) = 4I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \cos^2 \alpha \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta$$

## 6.2.5. Elektronenbeugung am Doppelspalt (Jönsson - 1961)

"We should say right away that you should not try to set up this experiment..." (Feynman)



$\lambda = 0.05 \text{ \AA}$  ( $E_{\text{kin}} = 50 \text{ keV}$ )  
Spaltabstand  $1 \mu\text{m}$ ;  
Spaltbreite  $0.3 \mu\text{m}$   
Masse  $9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$



übersetzt auf Lichtoptik mit  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ : Spaltabstand  $\sim 20 \text{ cm}$  und Spaltbreite  $\sim 5 \text{ cm}$ !

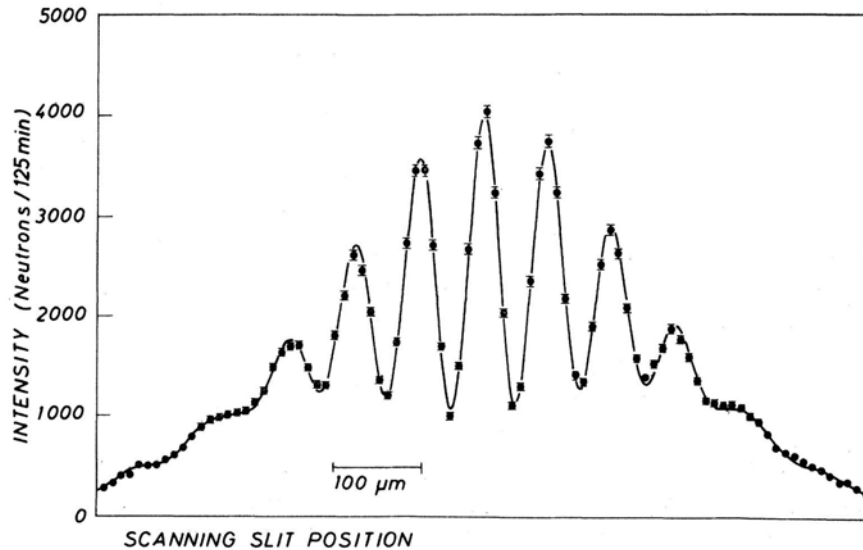
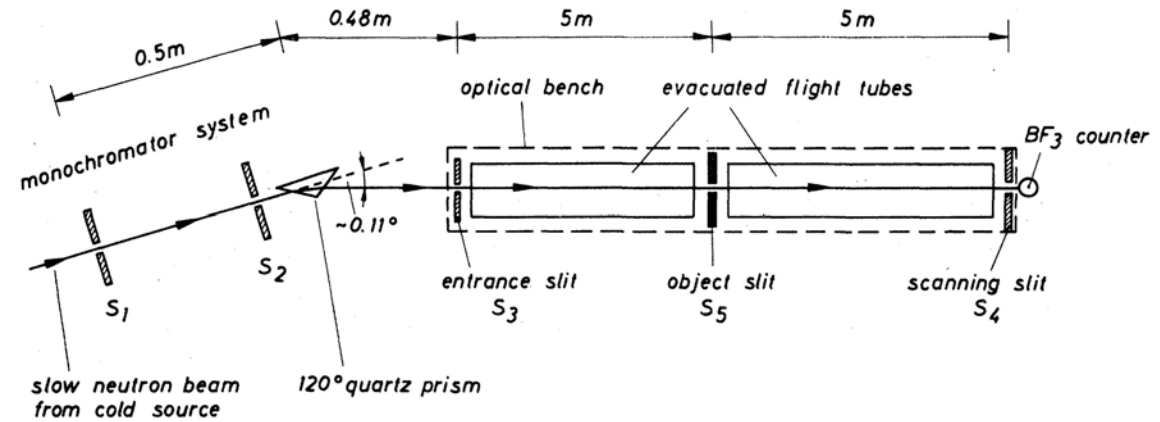
## 6.2.6. Neutronenbeugung am Doppelspalt

$$\lambda = 18.5 \text{ \AA}$$

Spaltabstand  $125 \mu\text{m}$

Spaltbreite  $20 \mu\text{m}$

Masse  $1.7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$



einzelne Neutronen interferieren mit sich selbst (alle 2 Sekunden ein Neutron, räumlicher Abstand ca.  $400 \text{ m}$ )

Zeilinger et al. (1988)

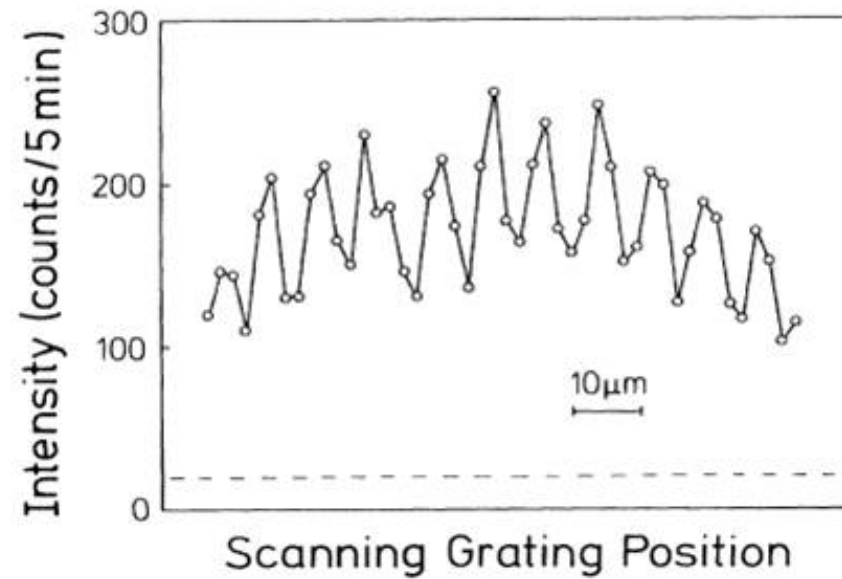
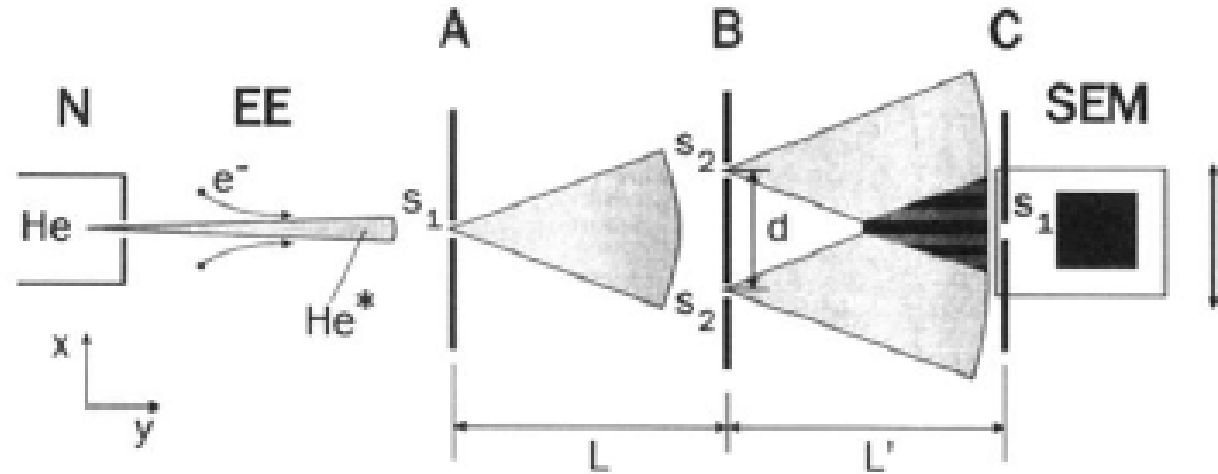
## 6.2.7. Atome am Doppelspalt (Helium)

$$\lambda = 1.03 \text{ \AA}$$

Spaltabstand  $8 \mu\text{m}$

Spaltbreite  $1 \mu\text{m}$

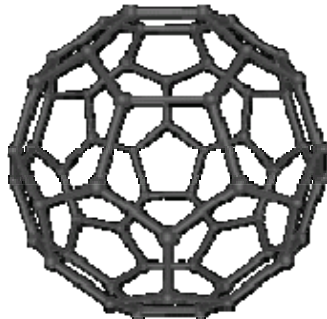
Masse  $6.7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$



O. Carnal and J. Mlynek (1991)

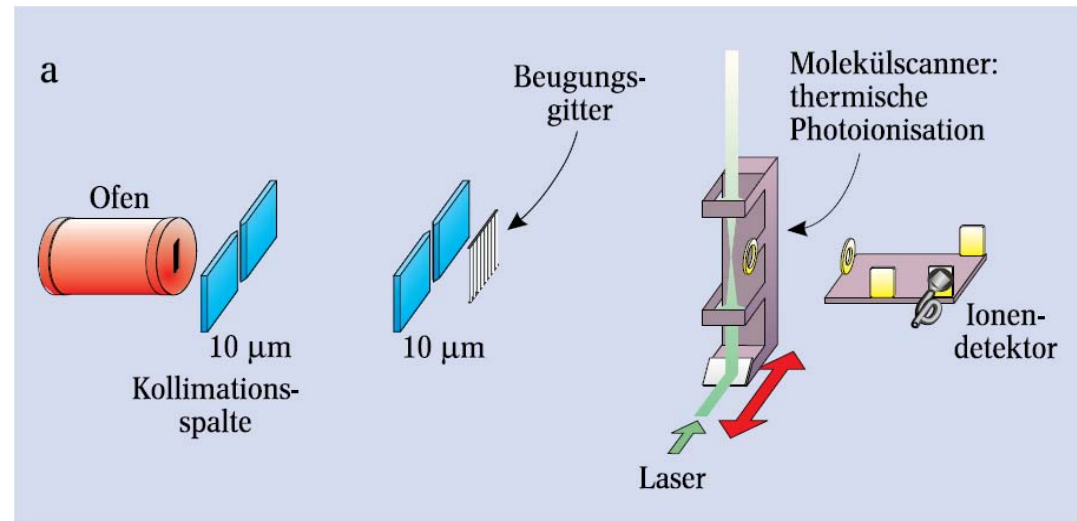
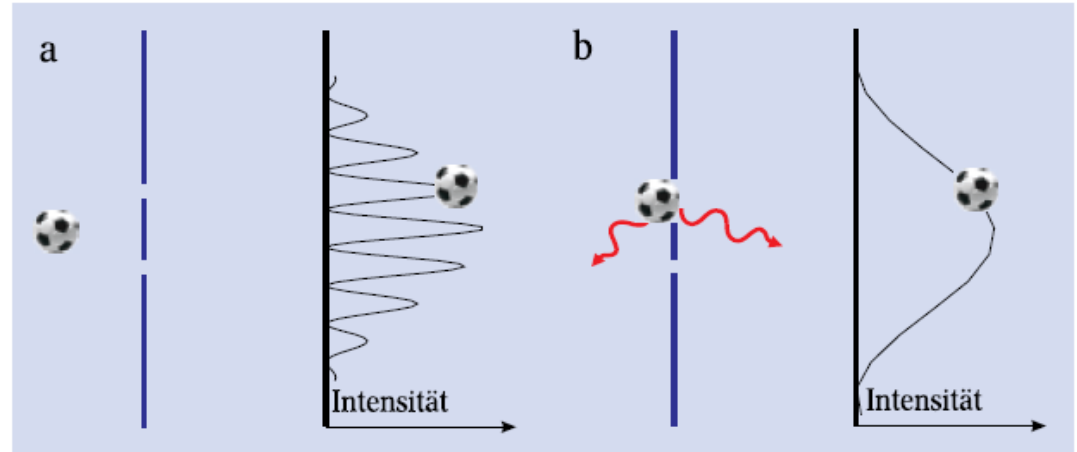
## 6.2.8. Moleküle

- Interferenz von  $C^{60}$  oder  $C^{70}$  Buckminster-Fullerenen (Bucky Balls, Nobelpreis in Chemie 1996)
- deBroglie Wellenlänge bei  $T = 900\text{ K}$ :  
 $\lambda \sim 2.5 \cdot 10^{-12}\text{ m}$
- Interferenz bei ausreichender longitudinaler und lateraler Kohärenz beobachtbar



### Experimenteller Aufbau:

- SiN Interferenzgitter mit 100 nm Gitterperiode und 50 nm Spaltbreite
- Ionisationsdetektor für einzelne Moleküle
- Interferenz einzelner Moleküle mit sich selbst



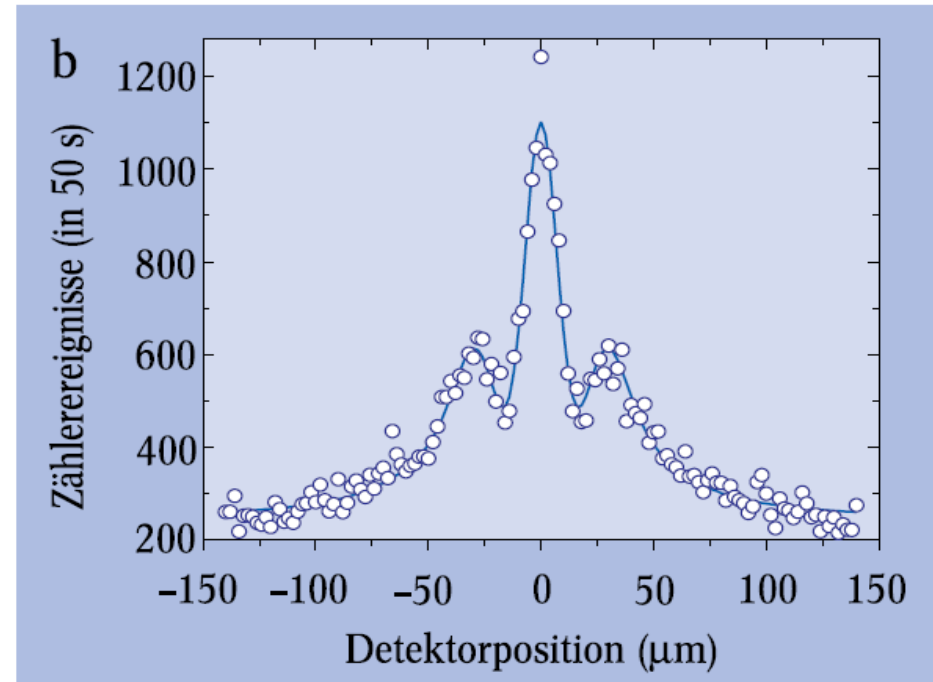


## Ergebnisse:

- orts aufgelöstes Interferenzmuster von Bucky Balls
- Massive Teilchen interferieren mit sich selbst
- Materiewellen

### Interessante Fragestellungen:

- Übergang der Physik von mikroskopischen zu makroskopischen Objekten?
- Übergang der Physik von klassischer Physik zu Quantenmechanik?



### Interferenzexperimente am Doppelspalt Teilchen und Quanten

- [Photonen] *G. I. Taylor*, Proc. Cambridge, Phil. Soc. 15, 114 (1909)
- [Elektronen] *C. Jönsson*, Z. Phys. 161, 454 (1961)
- [Neutronen] *A. Zeilinger*, Rev. Mod. Phys 60, 1067 (1988)
- [Atome] *O. Carnal, J. Mlynek*, Phys. Bl., Mai 1991, S. 379
- [Cluster] *W. Schöllkopf, J. P. Toennies*, Science 266, 1345 (1994)
- [Bucky Balls] *M. Arndt et al.*, Nature 401, 680 (1999)

## 6.3. Welcher Weg Information vs. Interferenz

### 6.3.1. Impulsübertrag zerstört Interferenz

- Im Teilchenbild muss Quantenobjekt entweder durch Spalt 1 oder 2
- Im Wellenbild kann es sowohl durch Spalt 1 und durch Spalt 2 und mit sich selbst interferieren
- Bei der Messung sieht man Einzelereignisse
- Läßt sich die Bahnkurve feststellen, ohne die Interferenz zu zerstören? (Bohr-Einstein Debatte)
- Komplementarität (Bohr): entweder Wellen oder Teilcheneigenschaften messbar

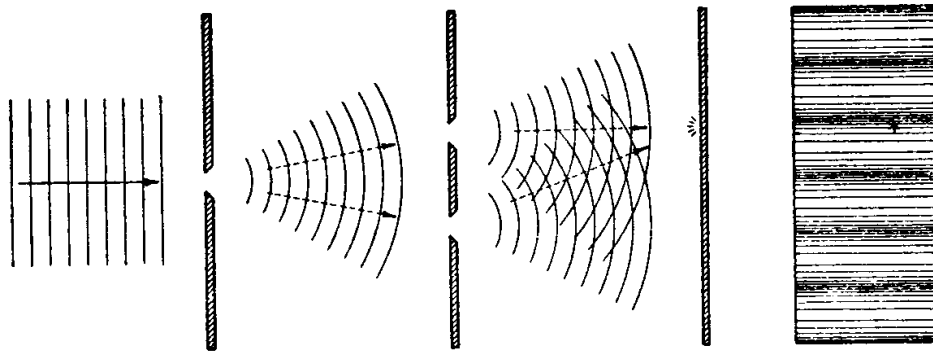
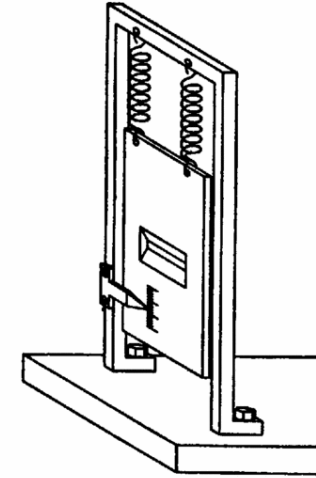


FIG. 3

**Behauptung (Einstein):** Die Messung des Rückstoßes am 1. Spalt erlaubt die Bestimmung der Bahnkurve ohne die Zerstörung des Interferenzmusters, da die Interferenz erst am 2. Schirm zustande kommt.

**Gegenargument (Bohr):** Um den Rückstoß so genau zu messen, muß der Anfangsimpuls des ersten Schirmes so genau bekannt sein, dass daraus wieder eine Unschärfe in seinem Ort folgt. Diese Unschärfe führt zur Auslöschung der Interferenzen.

[Wheeler & Zurek, Quantum Theory and Measurement]

### 6.3.2. Feynman's Gedankenexperiment

- Streuung Photonen - Elektronen zur Detektion der Teilchenbahn
- Impulserhaltung (a...Spaltabstand):

$$\frac{\Delta p_{\text{quer}}}{p} = \tan \alpha \approx \alpha < \theta_{\text{min}} \quad \theta_{\text{min}} \approx \frac{\lambda_{\text{el}}}{a}$$

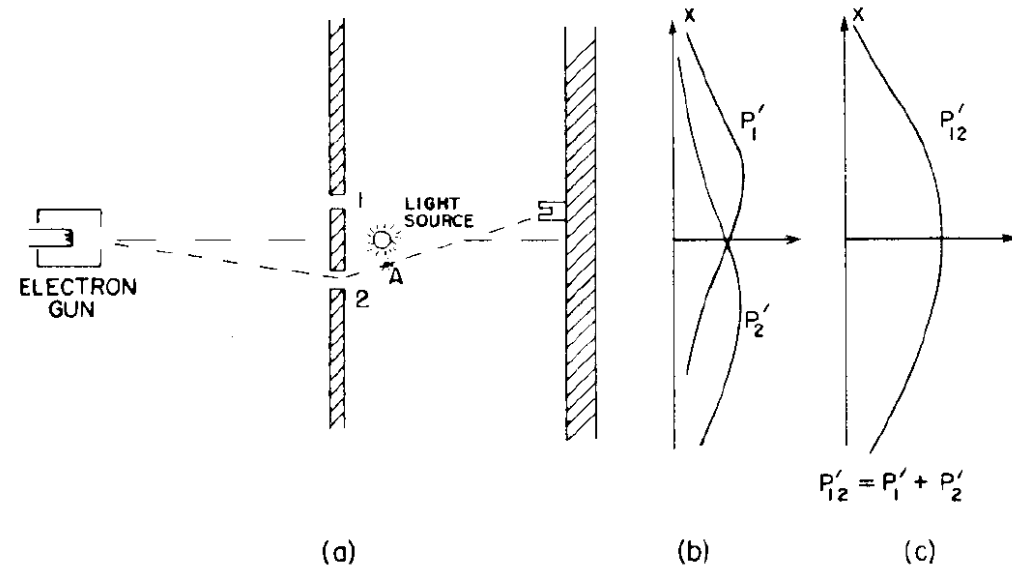
*"If an apparatus is capable of determining which hole the electron goes through, it cannot be so delicate that it does not disturb the pattern in an essential way. No one has ever found (or even thought of) a way around the uncertainty principle." (Feynman)*

- Damit die Interferenzmuster erhalten bleiben muss der Impuls des Lichts kleiner als der Impulsübertrag  $\Delta p_{\text{quer}}$  sein

- $p_{\text{photon}} = h/\lambda$

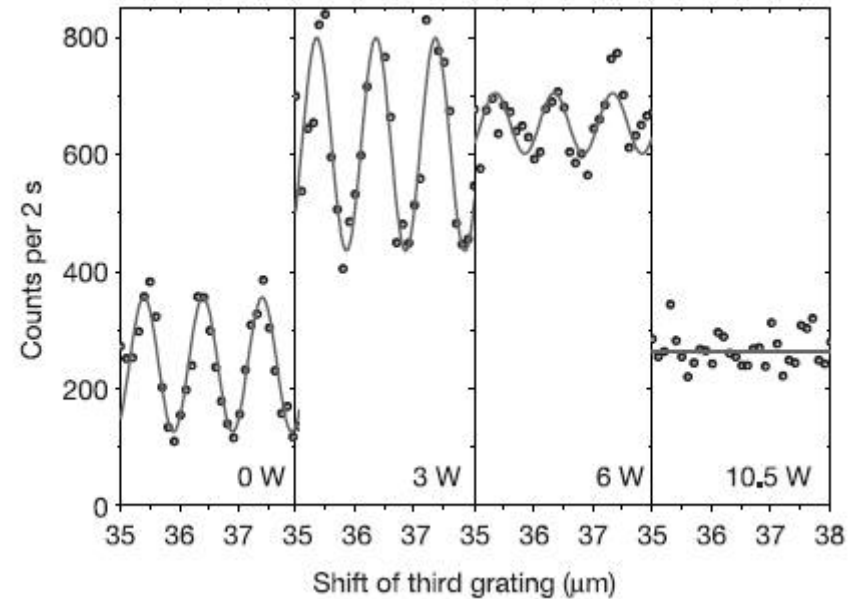
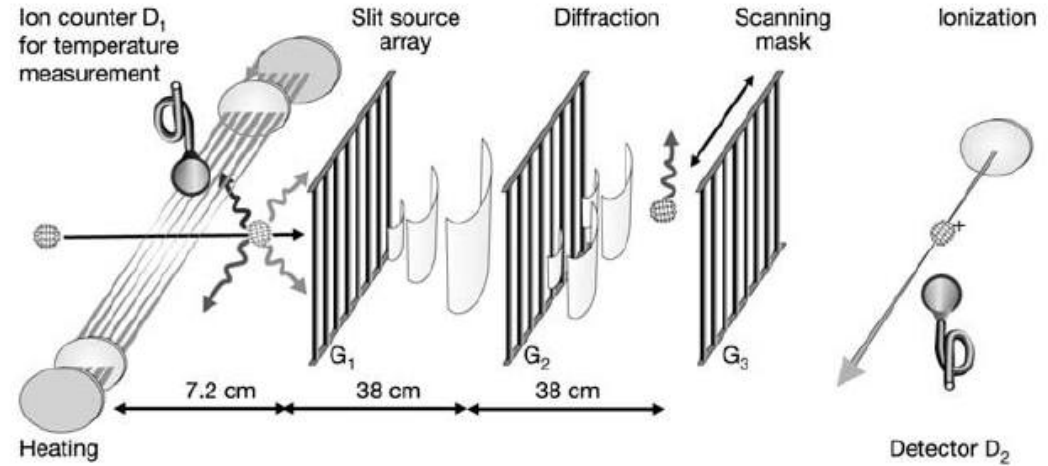
- $\frac{h/\lambda_{\text{photon}}}{h/\lambda_{\text{el}}} < \frac{\lambda_{\text{el}}}{a}$

- $\lambda_{\text{photon}} > a$
- Wellenlänge der Photonen größer als der Abstand der Spalte
- → keine Information über den Weg des Elektrons



### 6.3.3. Weg-Messung durch thermische Emission

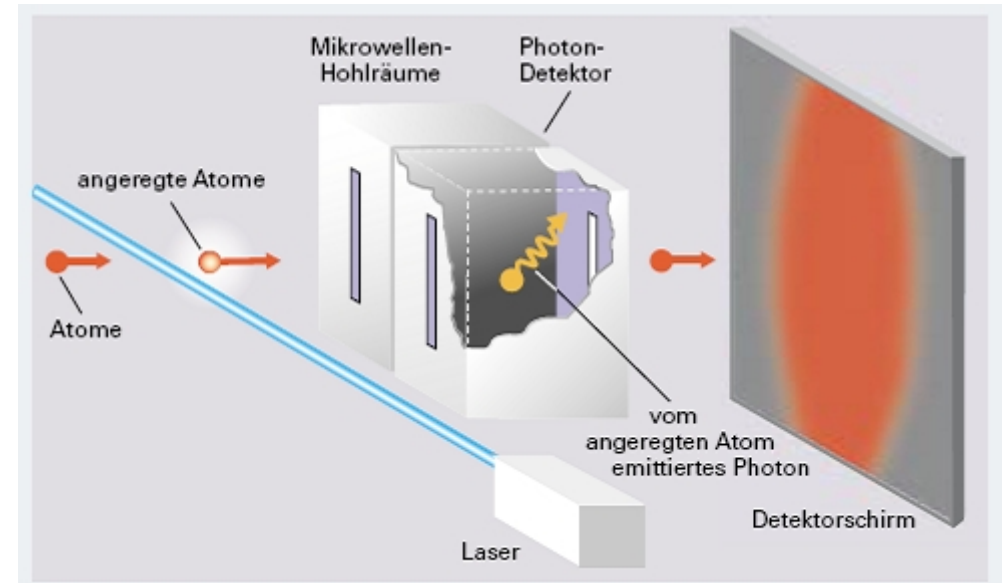
- C70 Moleküle werden an Gitter gebeugt (Masse  $1.34 \cdot 10^{-24}$  kg)
- heiße Moleküle  $\rightarrow$  mehr Photonenemissionen
- Gitterkonstante  $\sim 1 \mu$
- Lokalisierung der Moleküle durch thermische ( $T \sim 2500$  K) Emission von Photonen ( $\lambda \sim 0.5 \mu\text{m}$ ) nach dem Beugungsgitter
- Durch **Aufheizen** der Moleküle **verschwinden Interferenzmuster** (Welcher-Weg Information)



Hackermüller et al. (2004)

### 6.3.4. Komplementarität - Weg-Information ohne Impulsübertrag

- Historischer Zugang: Impulsübertrag (Streuung) verhindert Interferenz
- Jedoch: Impulsübertrag ist nur eine hinreichende Bedingung - Quantenkorrelationen zw. Messapparat und System genügen, um Interferenz zu zerstören
- **Gedankenexperiment Scully-Englert-Walther:**  
Impulsübertrag wäre zu klein, um Interferenzverlust zu erklären  
-> **Quanten-Korrelation zerstören Interferenz**



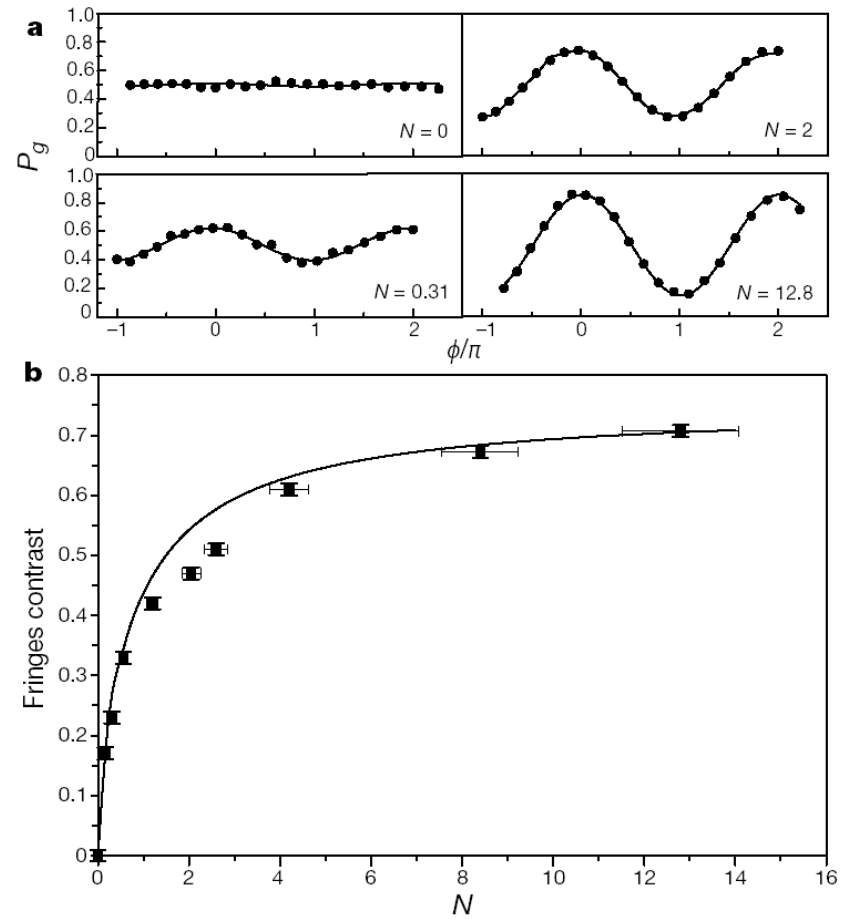
#### Gedankenexperiment:

- angeregtes Atom durch Doppelspalt
- hinter dem Doppelspalt zwei Mikrowellen-Hohlräume
- spontaner Zerfall (beschleunigt durch Hohlräume)
- Impulsübertrag vernachlässigbar

- 2 Möglichkeiten:
- Änderung  $\Delta$  der Photonzahl  $N$  in Hohlraum kann nachgewiesen werden ( $N=0,1$ )
  - "Welcher-Weg" Information -> **keine Interferenz**
  - Änderung der Photonenzahl kann **nicht** nachgewiesen werden ( $N \gg 1$ )
  - keine "Welcher-Weg" Information -> **Interferenz**

## Experimentelle Realisation:

Amplitude der Interferenzmuster in Abhängigkeit von Anzahl der Photonen in Mikrowellenhohlraum:

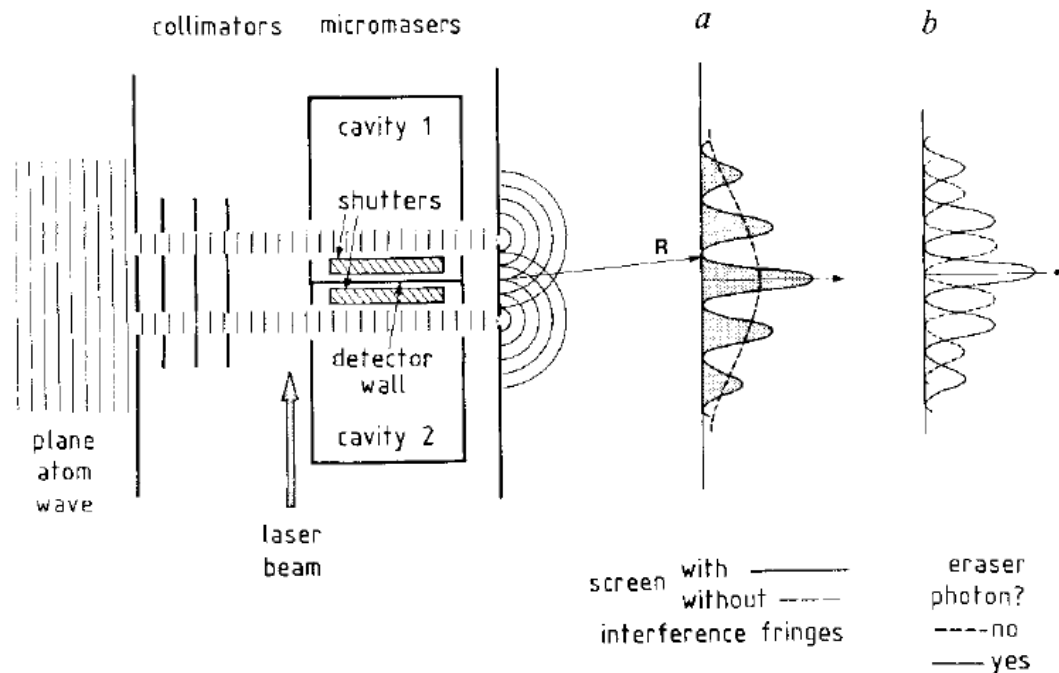


Bertet et al. (2001)

## 6.3.5. Quanten-Radierer

Was geschieht, wenn Welcher-Weg Information nachträglich wieder gelöscht wird?

- gemeinsamer Photodetektor zwischen den einzelnen Mikrowellen-Hohlräumen
- Öffnen der Abdeckungen auf beiden Seiten führt zur Detektion des abgegebenen Photons
- Dann: **keine Information über den Weg des Atoms**
- "Welcher-Weg"-Information wieder gelöscht
- → **Interferenz**



(z.B. Walborn et al., Spekt. Wissenschaften, Feb. 2004)