

8.6.1 Erwartungswert eines beliebigen Operators \hat{O}

$$\langle \hat{O} \rangle = \int \psi^* \hat{O} \psi dx$$

8.6.2 Beispiel: Erwartungswert des Impulses eines freien Teilchens

$$\begin{aligned} \langle \hat{p} \rangle &= \int \psi^* (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \psi dx \quad \text{mit} \quad \psi = A e^{-\frac{i}{\hbar}(\frac{E}{c} - p_x x)} \\ &= \int \psi^* p_x \psi dx = p_x \int \psi^* \psi dx = p_x \end{aligned}$$

8.6.3 Beispiel: Orts- und Impuls-Erwartungswerte für ein Teilchen im Potentialtopf

- Erwartungswert des Ortes $\langle x \rangle$

$$\langle x \rangle = \int_0^L \psi^* x \psi dx = \int_0^L x \frac{2}{L} \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{L}{2}$$

- Erwartungswert des Impuls $\langle p \rangle$

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \int_0^L \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= i\hbar \frac{m^2 v}{L^2} \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 0 \end{aligned}$$

Der Impuls-Erwartungswert verschwindet. Warum?

- aus bekannter Energie $E = p^2/2m$ erwarteter Impuls p

$$p_m^\pm = \pm \sqrt{2mE_n} = \pm \frac{n\pi \hbar}{L}$$

- mittlerer Impuls

$$p = \frac{p_m^+ + p_m^-}{2} = 0$$

8.7 Eigenfunktionen und Eigenwerte von Operatoren:

- wir betrachten einen quantenmechanischen Operator O
- wenn für diesen folgende Gleichung gilt:

$$\hat{O} \psi_n = o_n \psi_n$$

dann ist ψ_n eine Eigenfunktion des Operators O mit dem Eigenwert o_n

- eine solche Gleichung wird Eigenwertgleichung genannt
- sie ist die Bestimmungsgleichung für die Wellenfunktion ψ

8.7.1 Impuls-Eigenfunktionen

- Eigenwertgleichung für den Impuls p

$$\hat{p} \psi_n = p \psi_n \quad \text{with} \quad \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

Beispiel: Impuls-Eigenfunktionen für das Teilchen im Potentialtopf

- Impuls Eigenfunktionen

$$\psi_n^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2}{L}} e^{\pm i \frac{n\pi x}{L}}$$

- Impuls-Eigenwerte

$$p_n^{\pm} = \pm \frac{n\pi\hbar}{L}$$

- Energie-Eigenfunktionen des Teilchens im Potentialtopf sind offensichtlich keine Impuls-Eigenfunktionen.

8.8 Die Quantenmechanische Messung

- betrachte Wellenfunktion ψ_n , die Eigenfunktion des Operators A mit Eigenwert a_n ist.

$$\hat{A} \psi_n = a_n \psi_n$$

- Bestimme den Erwartungswert des Operators A , d.h. den Mittelwert der zu A gehörenden Messgröße, wenn sich das quantenmechanische System im Zustand ψ_n befindet.

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \rangle &= \int \psi^* \hat{A} \psi \, dx = a_n \int \psi_n^* \psi_n \, dx \\ &= a_n \end{aligned}$$

In diesem Fall entspricht der messbare Erwartungswert $\langle A \rangle$ gerade dem Eigenwert a_n von A .

Postulat:

Wenn eine physikalische Grösse, die zu einem Operator A eines quantenmechanischen Systems gehört, gemessen wird, dann ist das einzig mögliche Messresultat einer der Eigenwerte a_n von A .

Die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung ist eine Eigenwertgleichung für den Hamiltonoperator H .

$$\hat{H} \psi_n = E_n \psi_n$$

Die sogenannten Eigen-Energien E_n des durch den Hamilton-Operator H beschriebenen Systems entsprechen gerade den quantisierten möglichen Energien des Systems

8.9 Gleichzeitige Eigenfunktionen, Messbarkeit und Kommutatoren

- Wann lassen sich zwei durch Operatoren repräsentierte physikalische Größen einer Wellenfunktion ψ_n gleichzeitig beliebig genau messen?
- betrachte zwei Operatoren A und B mit **gleichzeitigen** Eigenfunktionen ψ_n und Eigenwerten a_n und b_n

$$\hat{A} \psi_n = a_n \psi_n$$

$$\hat{B} \psi_n = b_n \psi_n$$

- berechne Differenz zwischen zwei Messungen mit vertauschter Reihenfolge (A dann B und B dann A)
- wende A auf die zweite Gleichung und B auf die erste Gleichung an und subtrahiere sie voneinander

$$\begin{aligned} \hat{A} \hat{B} \psi_n - \hat{B} \hat{A} \psi_n &= b_n \hat{A} \psi_n - a_n \hat{B} \psi_n \\ &= (b_n a_n - a_n b_n) \psi_n = 0 \end{aligned}$$

- **Kommutator Relation**

$$(\hat{A} \hat{B} - \hat{B} \hat{A}) \psi_n = [\hat{A}, \hat{B}] \psi_n = 0$$

Wenn eine solche Relation für die Operatoren A und B gilt, dann existieren gleichzeitige Eigenfunktionen ψ_n und die Eigenwerte von A und B können gleichzeitig beliebig genau gemessen werden.

8.9.1 Beispiele für Kommutatoren

- Impuls und kinetische Energie

$$[\hat{p}_x, \frac{\hat{p}_x^2}{2m}] = 0$$

- Ort und Impuls

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

dies ist die Heisenbergsche Vertauschungsrelation:

Ort und Impuls lassen sich nicht gleichzeitig beliebig genau bestimmen

Wenn die Kommutator-Relation

$$[\hat{A}, \hat{B}] \psi_n \neq 0$$

für zwei Operatoren A und B gilt, so gibt es keine gemeinsamen Eigenfunktionen ψ_n der beiden Operatoren und die zugehörigen Messgrößen können nicht gleichzeitig mit beliebiger Genauigkeit bestimmt werden.

8.10 Das Superpositionsprinzip in der Quantenmechanik

- die Schrödinger-Gleichung ist **linear in der Wellenfunktion** ψ
- sie enthält keine Ausdrücke höherer Potenzen von ψ oder ihrer Ableitungen
- sind ψ_1 und ψ_2 Lösungen der Schrödinger-Gleichung, so sind auch ihre **Superpositionen (Überlagerungen)** Lösungen der selben Gleichung

$$\psi = a_1 \psi_1 + a_2 \psi_2 \quad \text{mit } |a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$$

- a_1 und a_2 sind komplexe Koeffizienten
- das Superpositionsprinzip gilt für Materiewellen und auch allgemeiner für beliebige quantenmechanische Zustände
- das Superpositionsprinzip ist verantwortlich für die in der Quantenmechanik beobachteten Interferenzeffekte

formales Beispiel:

$$|\psi|^2 = \psi^* \psi = (a_1^* \psi_1^* + a_2^* \psi_2^*) (a_1 \psi_1 + a_2 \psi_2)$$

von nur einer Wellenfunktion
abhängende Terme

$$= a_1^* a_1 \psi_1^* \psi_1 + a_2^* a_2 \psi_2^* \psi_2$$

von beiden Wellenfunktionen
abhängende Interferenzterme

$$+ a_1^* a_2 \psi_1^* \psi_2 + a_1 a_2^* \psi_1 \psi_2^*$$