

### 9.3.3 Lösungsansatz für die Schrödinger-Gleichung des harmonischen Oszillators

- Schrödinger-Gl.:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{1}{2} k x^2 \right) \psi = 0$$

- Normierung: dimensionslose Einheiten  $\tilde{x}$  für die Koordinate  $x$  und  $\tilde{E}$  für die Energie  $E$

$$\tilde{x} = \left( \frac{1}{\hbar} \sqrt{k m} \right)^{1/2} x = \sqrt{\frac{2\pi m \nu}{\hbar}} x$$

mit  $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\tilde{E} = \frac{2E}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2E}{\hbar \nu}$$

- somit ergibt sich die Schrödinger-Gleichung zu

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{x}^2} + (\tilde{E} - \tilde{x}^2) \psi = 0$$

- Normierungsbedingung für die Wellenfunktion  $\psi$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1$$

### 9.3.4 Quantisierung der Energie

- aus Normierungsbedingung für  $\psi$   $\tilde{E} = 2n + 1 = \frac{2E}{h\nu}$  mit  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

- Energie-Niveaus des harmonischen Oszillators

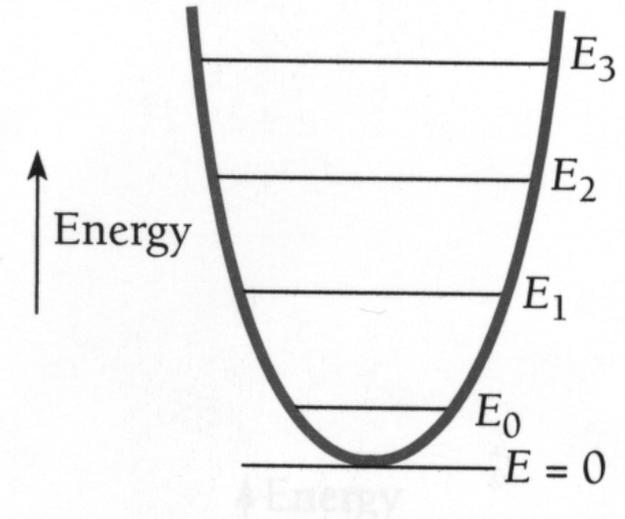
$$E_n = h\nu \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad E_n \propto \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

- charakteristische Eigenschaft des harmonischen Oszillators:  
äquidistante Energie-Niveaus

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = h\nu$$

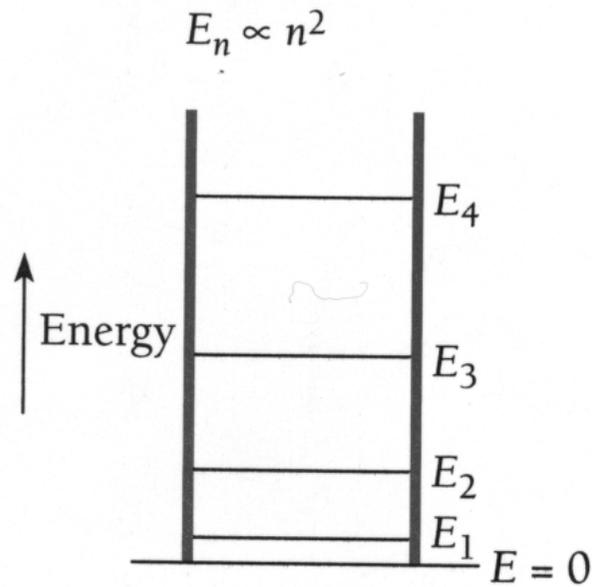
- **Nullpunktenergie** ( $n = 0$ ) niedrigste mögliche Energie eines harmonischen Oszillators

$$E_0 = \frac{1}{2} h\nu$$

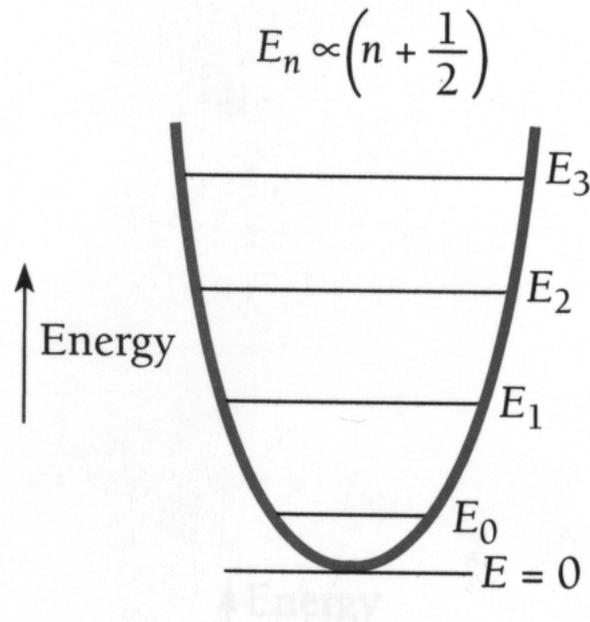


### 9.3.5 Energie-Niveaus in verschiedenen charakteristischen Potentialen ...

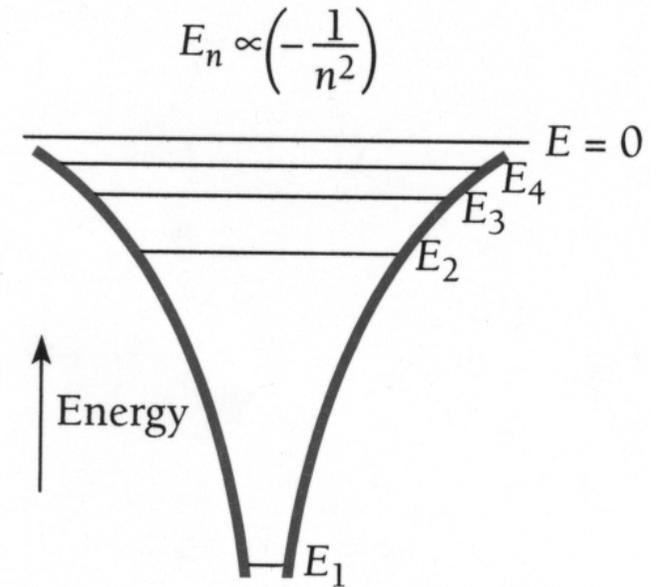
... und ihre Abhängigkeit von der Hauptquantenzahl  $n$



konstantes Potential:  
z.B. Teilchen in einem Potentialtopf



$x^2$  - harmonisches Potential:  
z.B. harmonischer Oszillator

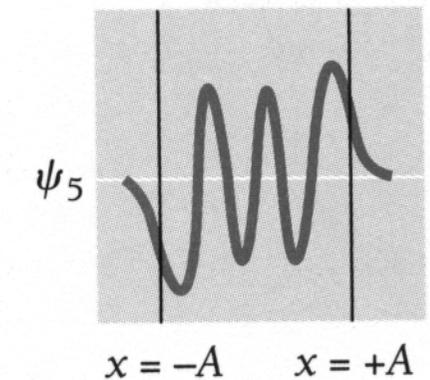
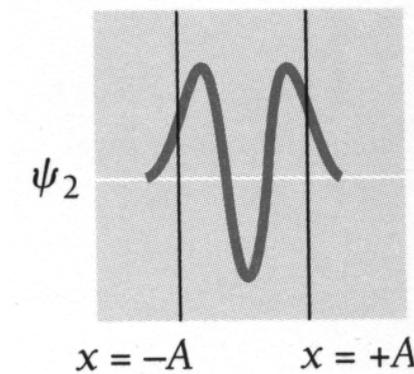
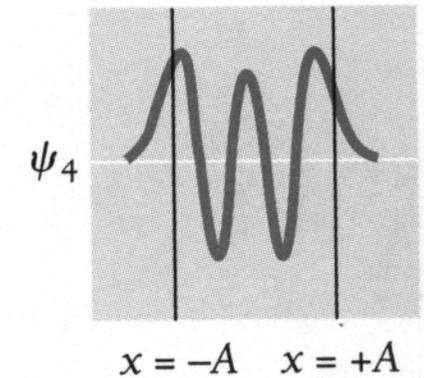
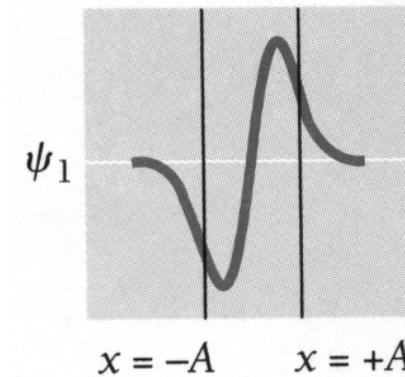
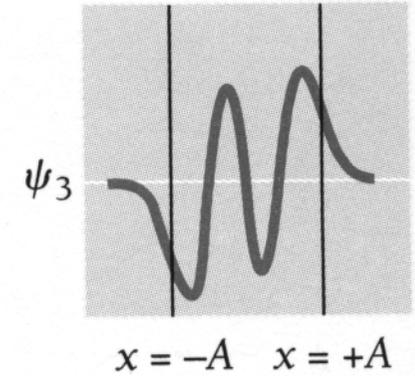
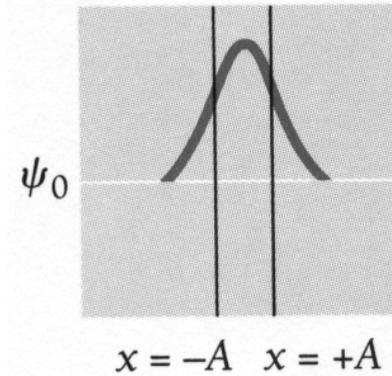


$1/r$  - Zentral-Potential:  
z.B. Wasserstoff-Atom

### 9.3.6 Wellenfunktionen des harmonischen Oszillators

$$\Psi_n = \left( \frac{2m\nu}{\hbar} \right)^{1/4} (2^m m!)^{-1/2} H_m(\tilde{x}) e^{-\tilde{x}^2/2}$$

mit  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$



- mit den Hermite-Polynomen  $H_n$

$n$	$H_n(\tilde{x})$	$\hat{E}_n$	$E_n$
0	1	1	$\frac{1}{2} h\nu$
1	$2\tilde{x}$	3	$\frac{3}{2} h\nu$
2	$4\tilde{x}^2 - 2$	5	$\frac{5}{2} h\nu$
3	$8\tilde{x}^3 - 12\tilde{x}$	7	$\frac{7}{2} h\nu$
4	$16\tilde{x}^4 - 48\tilde{x}^2 + 12$	9	$\frac{9}{2} h\nu$
5	$32\tilde{x}^5 - 160\tilde{x}^3 + 120\tilde{x}$	11	$\frac{11}{2} h\nu$

- die vertikalen Linien entsprechen den klassischen maximalen Oszillationsamplituden bei der gegebenen Energie
- quantenmechanisch hält sich der Oszillator mit endlicher Wahrscheinlichkeit außerhalb dieser klassischen Grenzen auf

### 9.3.7 Erwartungswert der Position, klassisch und quantenmechanisch

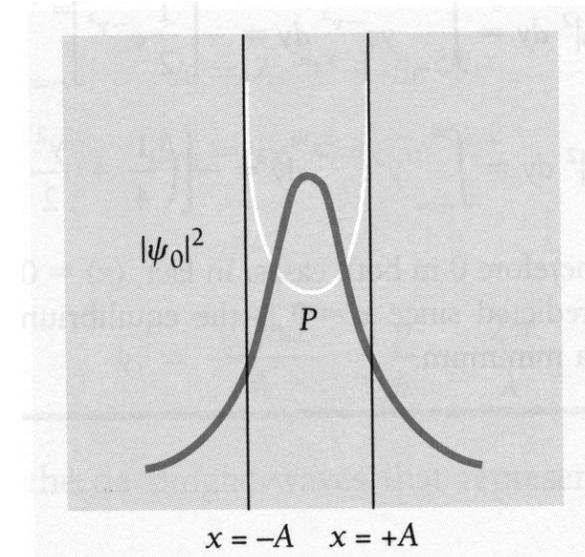
#### klassisch:

- grösste Aufenthaltswahrscheinlichkeit an den klassischen Umkehrpunkten ( $x = \pm A$ ) des Oszillators

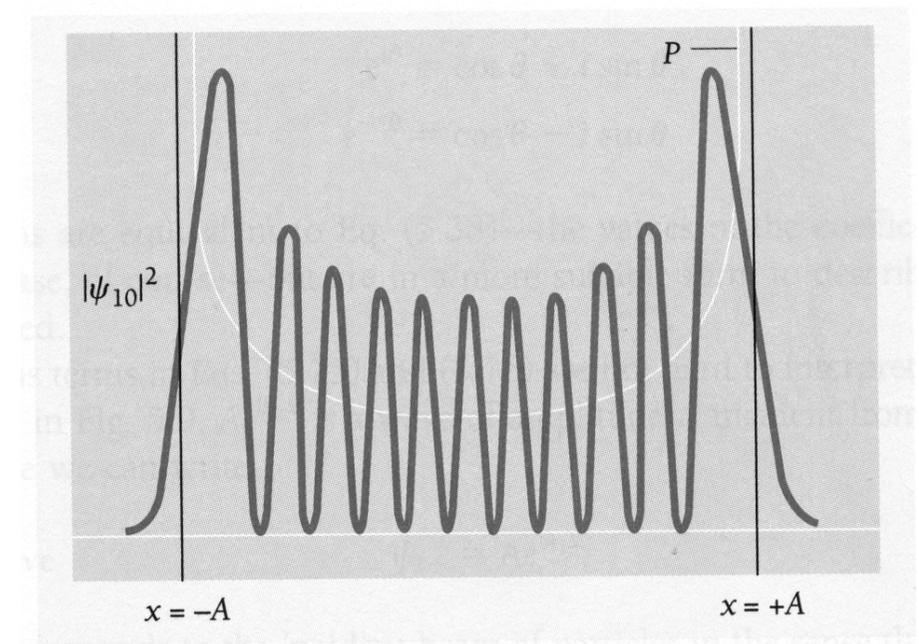
#### quantenmechanisch:

- im Grundzustand ( $n = 0$ ) ist  $|\psi|^2$  am grössten in der Ruhelage ( $x = 0$ )
- für steigende Hauptquantenzahl  $n$  nähert sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung der klassischen an
- Beispiel für das Korrespondenzprinzip für grosse Energien und Quantenzahlen
- die Wahrscheinlichkeit des quantenmechanischen Oszillators sich bei Amplituden grösser als  $\pm A$  aufzuhalten sinkt mit steigender Hauptquantenzahl  $n$

$n = 0$ :



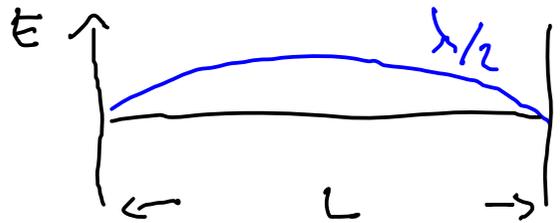
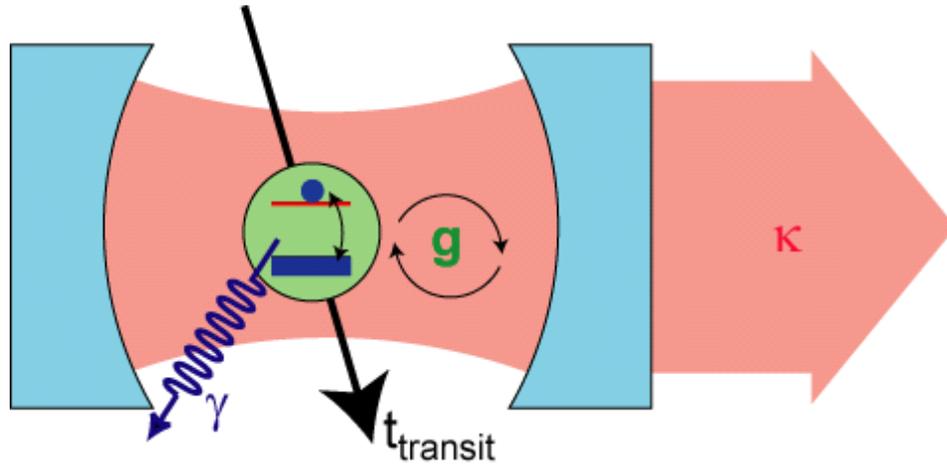
$n = 10$ :



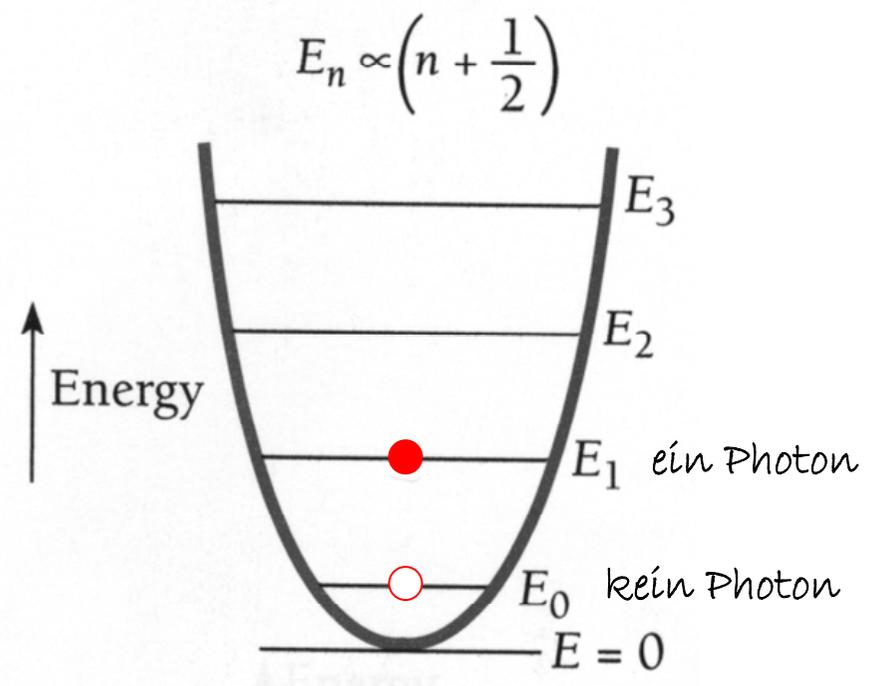
### 9.3.8 Beispiele für quantenmechanische harmonische Oszillatoren

#### Hohlraum Quanten-Elektrodynamik (Cavity QED)

Übersichtsartikel: J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche, Rev. Mod. Phys. 73, 565 (2001)



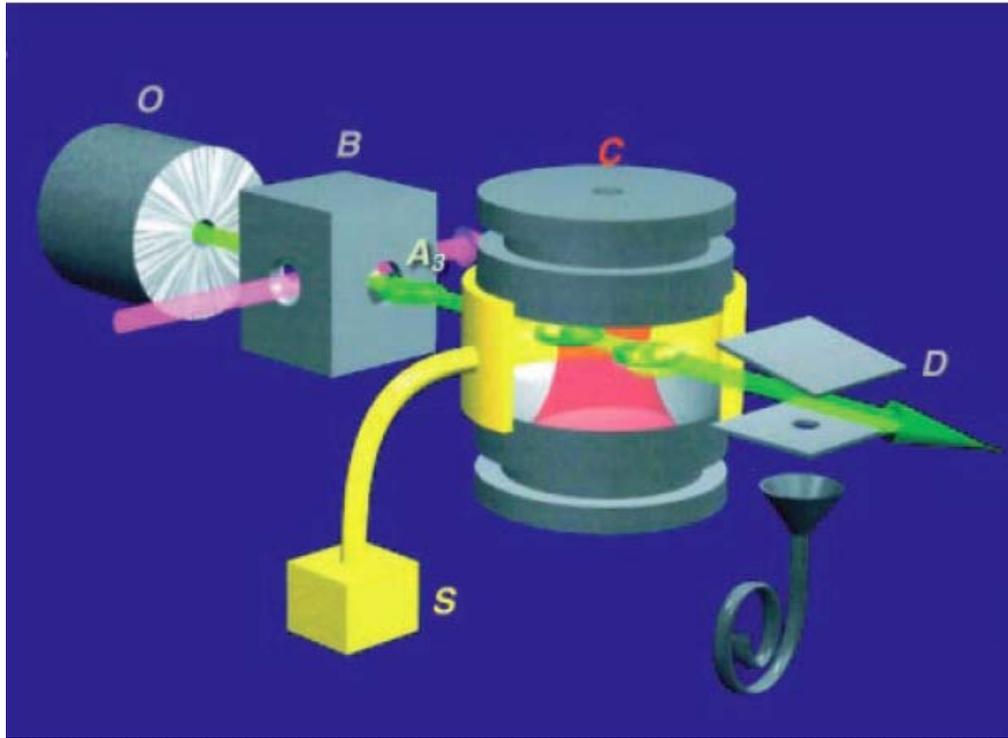
stehende Welle  
= Mode  
= harmonischer Oszillator



Photonen beschrieben als quantenmechanische Anregungen eines harmonischen Oszillators:

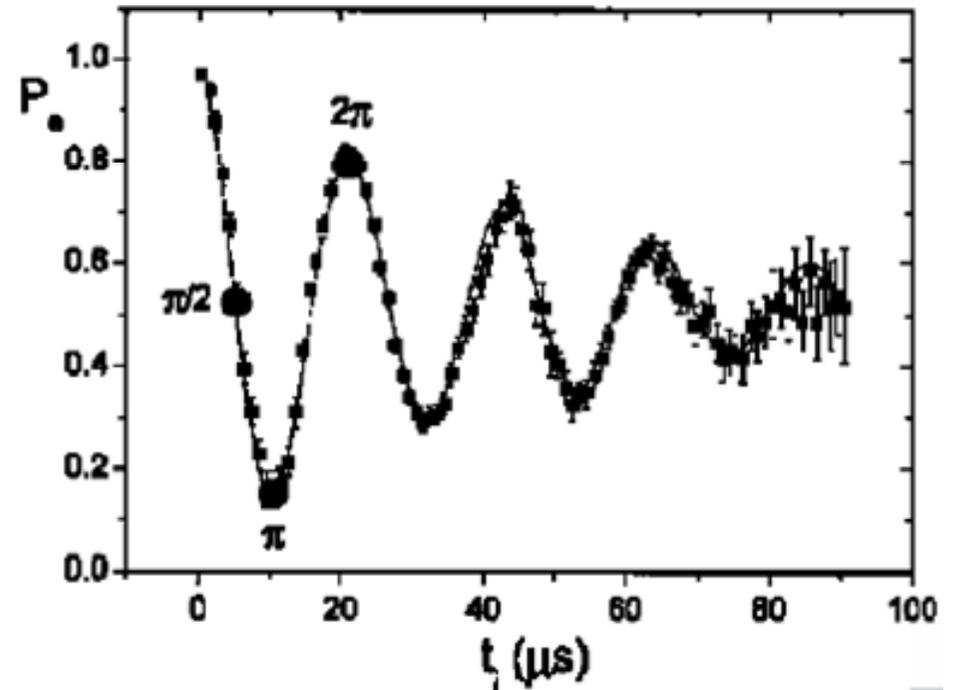
- einzelne Photonen eingefangen zwischen Spiegeln (blau) (eine Hohlraum für Photonen)
- stehende elektromagnetische Welle mit einem einzelnen Photon (rot)
- einzelnes Atom (grün) als Quelle und Detektor für einzelne Photonen

# Hohlraum Quantenelektrodynamik (QED) mit Rydberg-Atomen



Aufbau:

- Ofen (O) zur Erzeugung von freien Atomen
- Wechselwirkung mit Lasern (B) erzeugt Rydberg-Zustände
- Hohlraumresonator (C) aus zwei Spiegeln zum speichern von einzelnen Photonen
- Ionisationsdetektor (D)



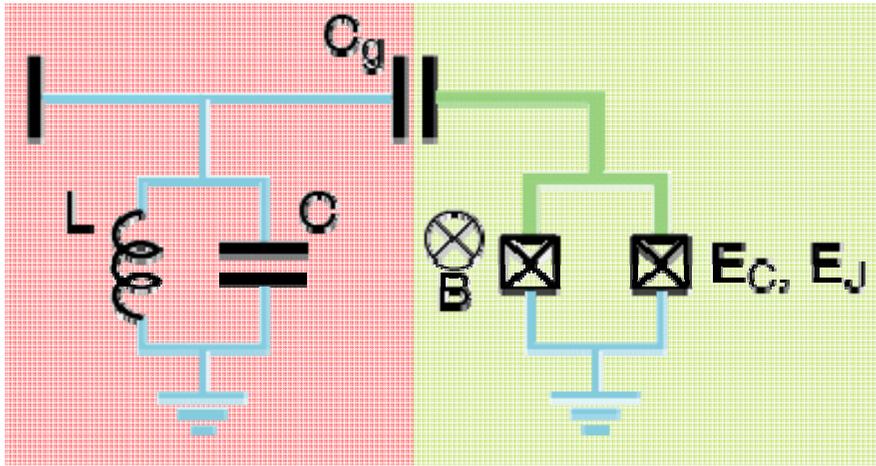
Beobachtung:

- periodische Emission und Reabsorption eines einzelnen Photons durch ein einziges Rydberg-Atom
- Quantenmechanik mit einzelnen Photonen und einzelnen Atomen.

Thema für Vortrag: Cavity QED (J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche, ENS, Paris)

# Der elektrische quantenmechanische harmonische Oszillator

schematische Darstellung der elektrischen Schaltung

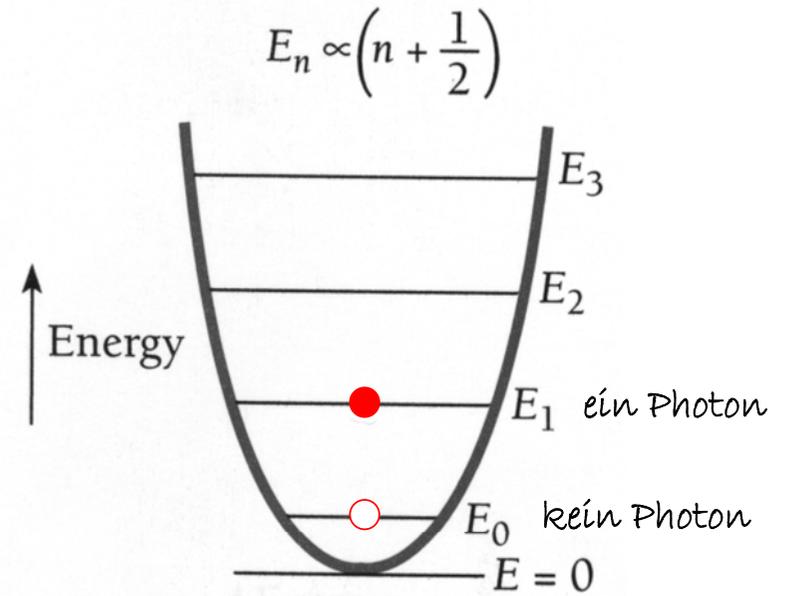


elektrischer  
harmonischer  
LC-Schwingkreis:

- Induktivität  $L$
- Kapazität  $C$

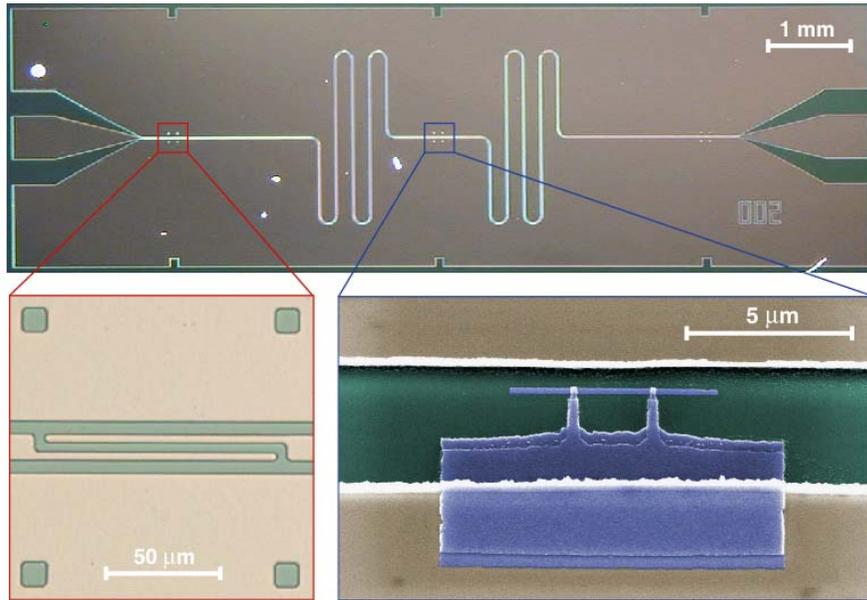
elektrisches künstliches Atom  
(Elektron-Paare im Potentialtopf)  
mit nicht äquidistanten diskreten  
Energie-Niveaus:

- charakteristische Energien
- Ladungsenergie  $E_C$
- Josephson Energie  $E_J$



# Experiment: Der erste quantenmechanische harmonische Oszillator in einer elektrischen Schaltung

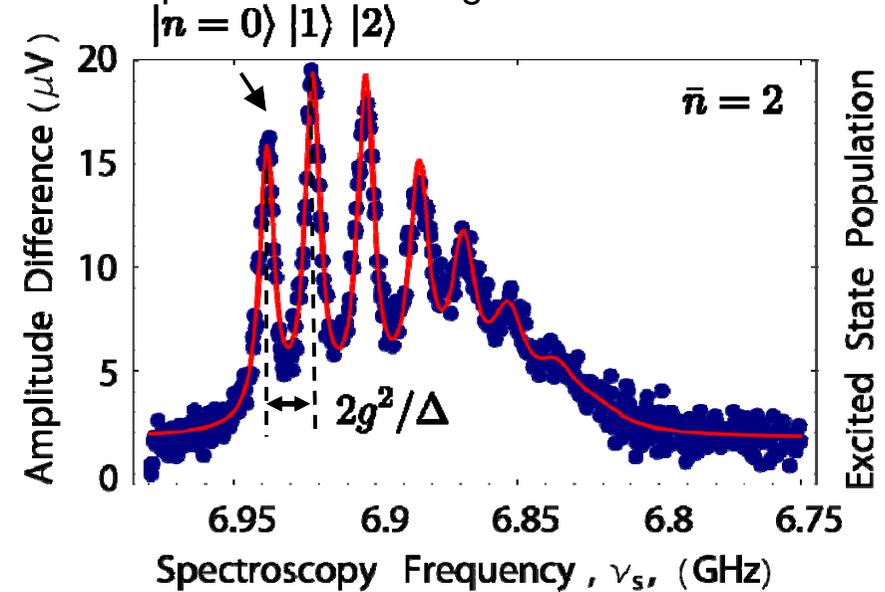
planarer Wellenleiter als integrierter harmonischer Oszillator



- künstliches Atom (blau)
- harmonischer LC-Oszillator (grau)

A. Wallraff *et al.*, *Nature* (London) **431**, 162 (2004)

ein Beispiel: Beobachtung einzelner Photonen



- Spektrum eines künstlichen Atoms
- eine Spektrallinie für jeden Photonzustand  $n = 1, 2, 3, \dots$
- Intensitäten der Linien sind proportional zur Besetzungswahrscheinlichkeit des Zustands

D. Schuster *et al.*, *Nature* **445**, 515 (2007)

einleitender Artikel: R. J. Schoelkopf and S. Girvin, *Nature* (London) **451**, 664 (2008)