

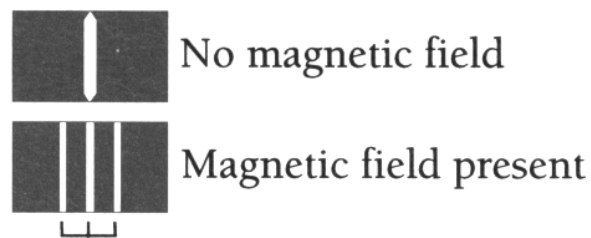
11. Der Spin des Elektrons

Beobachtung:

- Aufspaltung von Spektrallinien in nahe beieinander liegende Doppellinien
 - z.B. die erste Linie der Balmer-Serie ($n=3 \rightarrow n=2$) des Wasserstoff-Atoms ist bei der Wellenlänge $\lambda = 656.3 \text{ nm}$ ohne externen Felder bereits in eine Doppellinie mit Wellenlängen-Abstand $\Delta\lambda = 0.14 \text{ nm}$ aufgespalten
- eine solche Aufspaltung wird auch **Fein-Struktur** genannt

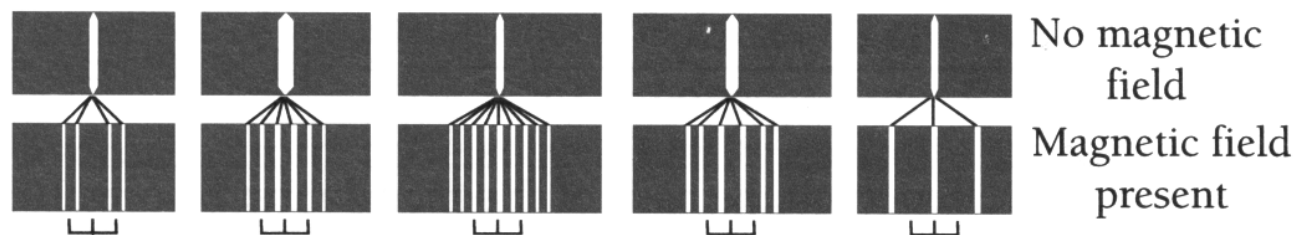
weitere Beobachtung:

- **normaler Zeeman-Effekt:** der Übergang spaltet in drei äquidistante Linien auf



Expected splitting

- **anomaler Zeeman-Effekt:** Aufspaltungen in 4, 6 oder mehr Linien, deren Abstand nicht durch den normalen Zeeman-Effekt erklärt werden kann.



Expected splitting

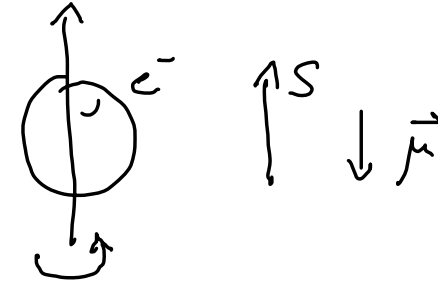
Erklärung (**Goudsmit und Uhlenbeck, 1925**):

- Die Lösung des räumlichen Teils der Schrödinger-Gleichung ist nicht ausreichend, um alle Eigenschaften des Wasserstoff-Atoms korrekt zu beschreiben.
- Eine zusätzliche Eigenschaft, der Eigendrehimpuls des Elektrons, der üblicherweise Spin genannt wird, muss betrachtet werden.

11.1 Versuch der klassischen Motivation des Eigendrehimpuls

Idee:

- betrachte Rotation des Elektrons mit Ladung e um eine feste Achse.
- Kann diese Rotation den intrinsischen Drehimpuls und das magnetische Moment erklären?



- Schätzt man die Grösse des Elektron mit $r_e < 10^{-16} m$ ab, so müsste die Rotationsfrequenz, die benötigt wird, um den beobachteten Drehimpuls und das magnetische Moment zu erklären, so hoch sein, dass die Rotationsgeschwindigkeit am Äquator des Elektrons die Lichtgeschwindigkeit überschreiten würde.
- Es existiert keine klassische Erklärung für das Phänomen des Spins!

Vorhersage der **relativistischen Quantenmechanik** (Paul Dirac):

- Ein Teilchen mit der Masse und der Ladung eines Elektrons besitzt einen Eigendrehimpuls und ein intrinsisches magnetisches Moment.
- Alle Elektronen besitzen einen Eigendrehimpuls S .
- Der Elektron-Spin erzeugt ein permanentes magnetisches Moment μ .
- Daher sind z.B. Atome mit einem einzelnen Spin in einem $l=0$ Zustand paramagnetisch und nicht diamagnetisch.

11.2 Quantisierung des Spin

- Betrag des Eigendrehimpuls

$$S = \sqrt{s(s+1)} \hbar = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar$$

Die Beziehung zwischen dem Spin S und der Spin-Quantenzahl s ist identisch zu der Beziehung zwischen dem Bahn-Drehimpuls L und der Bahn-Drehimpuls-Quantenzahl l .

- mit der **Spin-Quantenzahl** des Elektrons $s = 1/2$

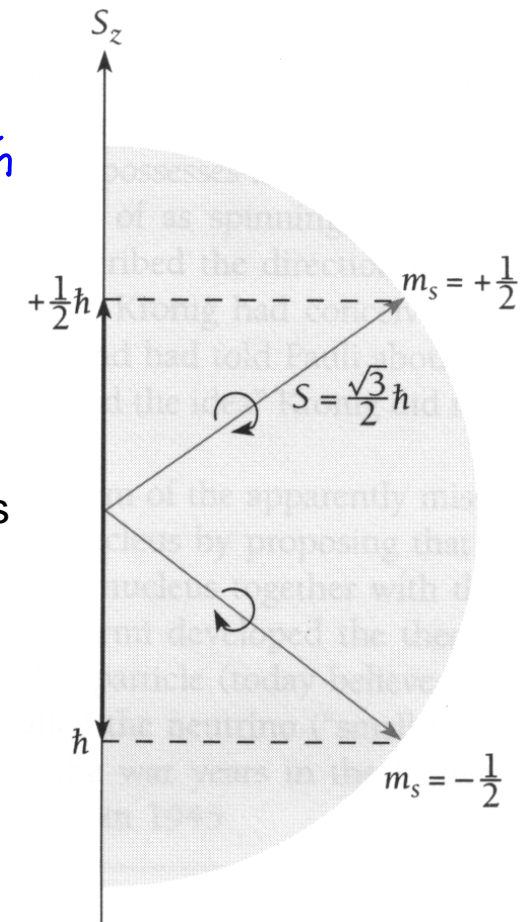
Richtungsquantisierung des Spin

- **z-Komponente des Spin:**

$$S_z = m_s \hbar = \pm \frac{1}{2} \hbar$$

- mit magnetischer Spin-Quantenzahl $m_s = \pm 1/2$

- Daher gibt es $2s + 1 = 2$ unterschiedliche mögliche Ausrichtungen des Spin hinsichtlich der Quantisierungsachse, deren Richtung z.B. durch ein äusseres Magnetfeld B_z entlang der z-Richtung festgelegt ist.



11.3 Magnetisches Moment des Elektrons

$$\vec{\mu}_s = - \frac{e}{m} \vec{S}$$

- gyromagnetisches Verhältnis des Elektron-Spin

$$|\vec{\mu}_s|/|\vec{S}| = - \frac{e}{m}$$

gyromagnetisches Verhältnis
der Bahnbewegung des Elektrons

$$|\vec{\mu}_L|/|\vec{L}| = - \frac{e}{2m}$$

- g-Faktor des Elektron Spin

$$\vec{\mu}_s = - g_s \frac{e}{2m} \vec{S}$$

mit

$$g_s = 2.0023$$

- Vorhersage der relativistischen Quantenmechanik: $g_s = 2$
- kleine Korrektur durch Quantenelektrodynamik (QED) (Vakuum-Fluktuationen): $g_s = 2.0023$
- z-Komponente des magnetischen Moments μ des Elektrons

$$\mu_z = - \frac{e}{m} \hbar m_s = \pm \frac{e\hbar}{2m} = \pm \mu_B$$

- mit dem Bohrschen Magneton

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 9.274 \cdot 10^{-24} \frac{\text{J}}{\text{T}} = 5.788 \cdot 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{T}}$$

11.4 vollständige Quantenzahlen des Wasserstoff-Atoms

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Hauptquantenzahl (Energie)

$$l = 0, 1, \dots, n-1$$

Bahndrehimpuls-Quantenzahl (Bahndrehimpuls)

$$m_l = -l, \dots, 0, \dots, +l$$

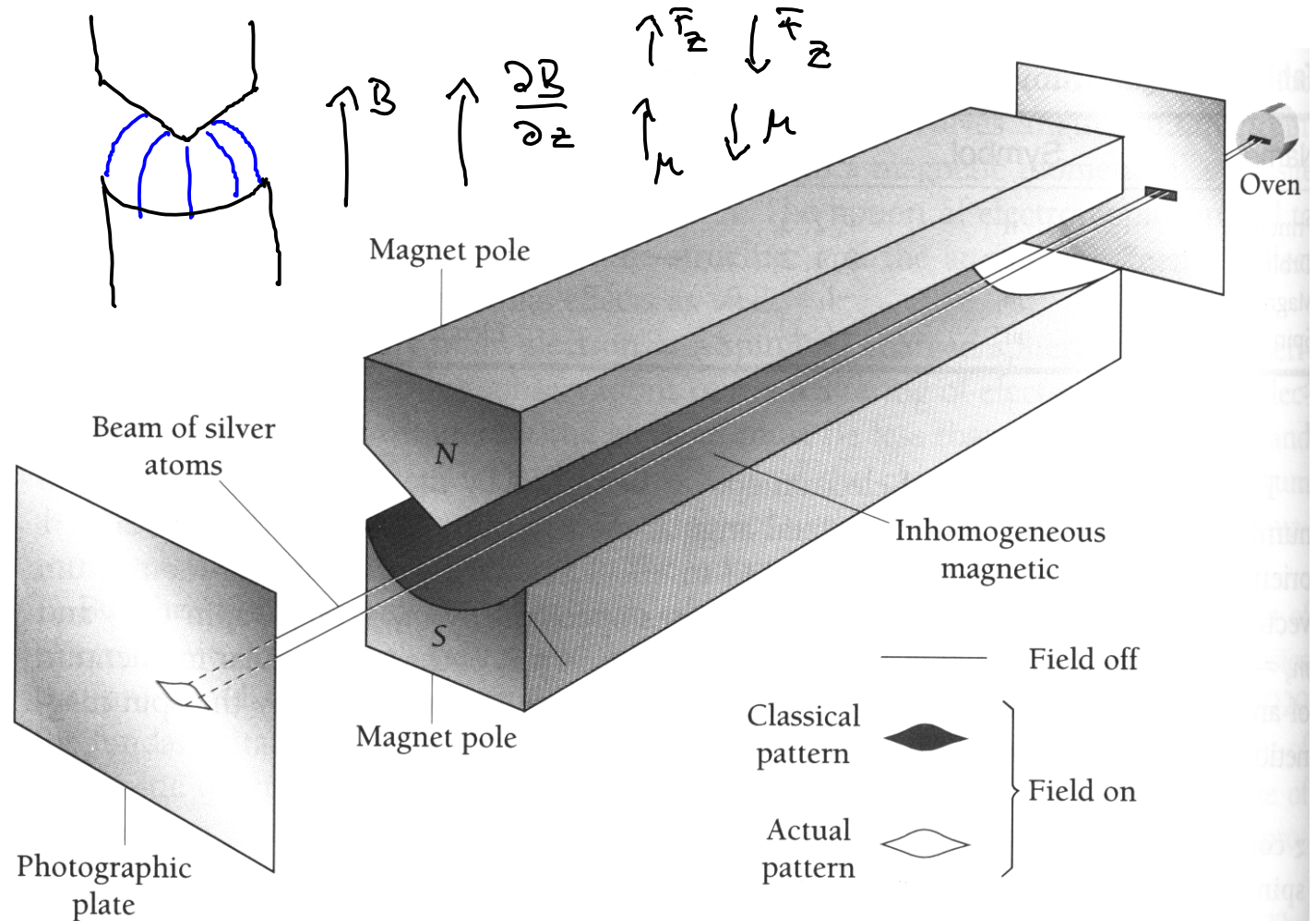
magnetische Quantenzahl (Richtung des Drehimpuls)

$$m_s = \pm \frac{1}{2}$$

magnetische Spin-Quantenzahl (Richtung des Spins)

11.5 Stern-Gerlach Experiment

- Das magnetische Moment μ neutraler Silberatome (Ag) ist durch einen einzelnen Elektron-Spin verursacht.
- In einem inhomogenen Magnetfeld wirkt eine Kraft auf das magnetische Moment die von dessen Richtung abhängt.
- Ein homogenes Feld würde nur ein Drehmoment hervorrufen.



- potentielle Energie eines magnetischen Moments μ in einem externen Feld \mathbf{B}
- die auf das Moment wirkende Kraft

$$U_{\text{m}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

$$F_z = -\frac{\partial U_{\text{m}}}{\partial z} = \mu_z \frac{\partial B}{\partial z} = \mu \cos \alpha \frac{\partial B}{\partial z}$$

klassische Erwartung:

- Es sollten alle möglichen Ausrichtungen des magnetischen Moments beobachtet werden.

experimentelle Beobachtung:

- Nur zwei charakteristische Ausrichtungen des magnetischen Moments μ und somit des Spins \mathbf{S} des Elektrons relativ zum externen Magnetfeld treten auf.
- Alle Atome mit einem einzelnen s-Elektron zeigen dieselbe Auslenkung.
- Dies zeigt, dass sich alle magnetischen Momente (Bahn und Spin) der inneren Elektronen gegenseitig aufheben.
- Das äusserste s-Elektron hat keinen Bahndrehimpuls. Daher lässt sich der Spin-Drehimpuls unabhängig vom Bahndrehimpuls messen.
- Der Betrag und die Richtung von Drehimpulsen und magnetischen Momenten sich in feldfreiem Raum bewegender Atome ist erhalten.

Bemerkungen:

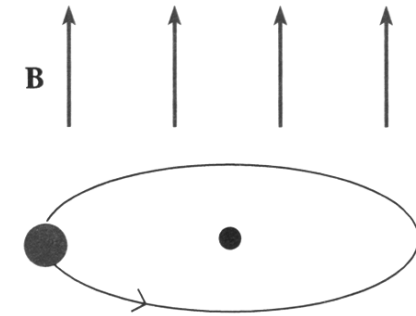
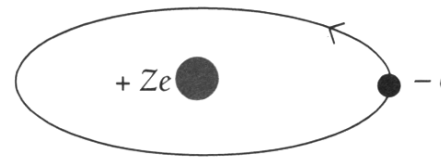
- erste Beobachtung der Richtungs-Quantisierung des Elektron-Spins (1921)
- quantitative Auswertung erlaubt Bestimmung des Bohr-Magnetons
- kann auch als generelle Methode zur Bestimmung des magnetischen Moments von Atomen verwendet werden

11.6 Spin-Bahn-Kopplung

- Die Wechselwirkung des magnetischen Moments μ des Elektrons mit seinem Bahn-Drehimpuls l wird Spin-Bahn-Kopplung genannt.
- Dieser Effekt führt zu einer Feinstruktur, d.h. einer Aufspaltung von Spektrallinien in mehrere Sub-Linien, im einfachsten Fall in eine Doppel-Linie, wie z.B. bei der Natrium D-Linie.

klassisches Modell:

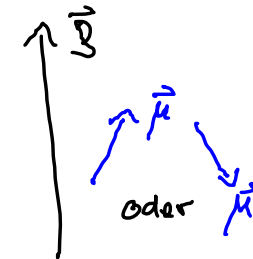
- betrachte die Bahnbewegung eines Elektrons um einen Atomkern mit Ladung $+Ze$
- Im rotierenden Bezugssystem des Elektrons erzeugt die Bahnbewegung des positiv geladenen Kerns ein Magnetfeld \mathbf{B} .



- Das magnetische Moment des Elektron-Spins μ wechselwirkt mit dem durch die Bahnbewegung des Elektrons hervorgerufenen Magnetfeld \mathbf{B} . In diesem Feld hat das Elektron die zusätzliche potentielle Energie U_m .

$$U_m = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \mu B \cos \theta$$

$$= -\mu_z B = \pm \mu_B B$$



- Jeder elektronische Zustand in einem Eielektronen-System mit Bahndrehimpuls spaltet in zwei Zustände mit unterschiedlicher Energie auf.

11.6.1 Spin-Bahn-Kopplung im Wasserstoff-Atom

- das Feld der Bahnbewegung

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r} = \frac{\mu_0 f e}{2r}$$

- mittlerer Bahnradius

$$r = n^2 a_0$$

- Umlauffrequenz

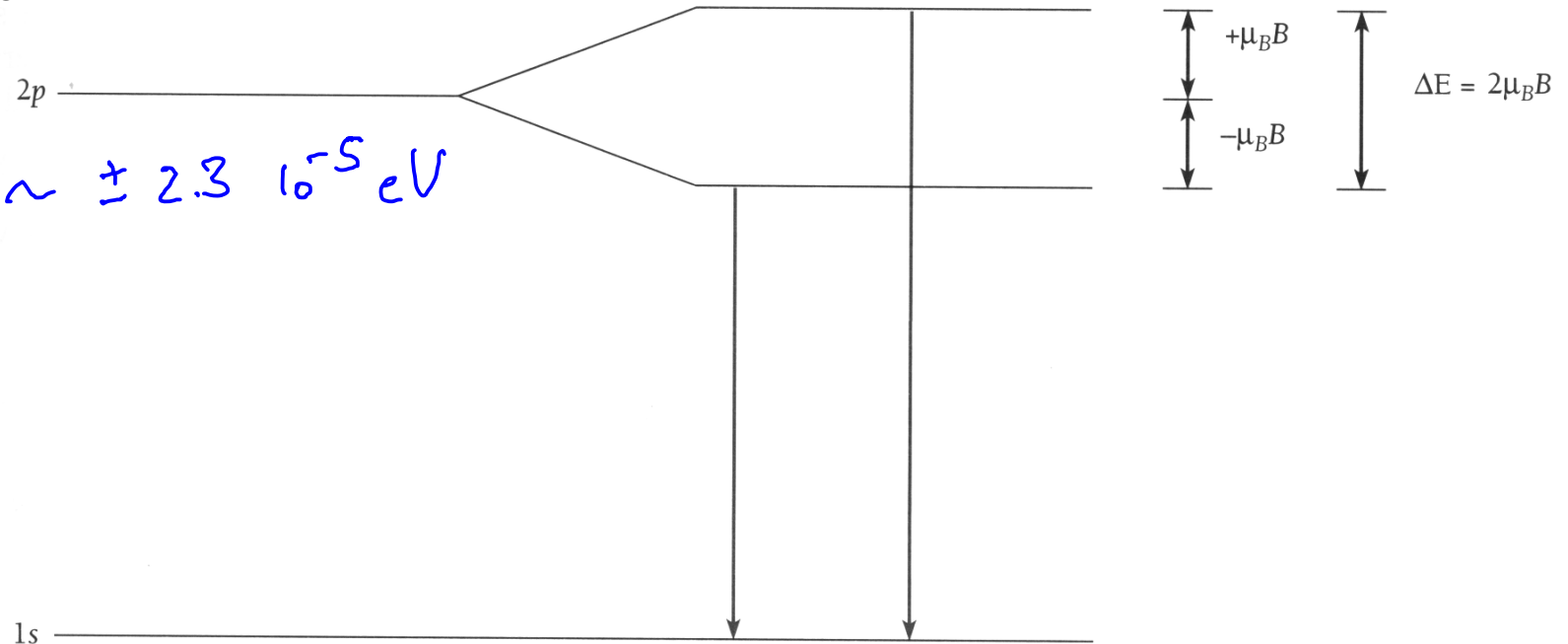
$$f = \frac{v}{2\pi r} = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m r}} \frac{1}{2\pi r}$$

- daher ergibt sich für ein Elektron in einem 2p Zustand

$$B \sim 0.4 \text{ T}$$

- mit dem vereinfachten Energie-Niveau-Diagramm

$$U_m = \pm \mu_B B \sim \pm 2.3 \cdot 10^{-5} \text{ eV}$$



11.7 Gesamtdrehimpuls

- Jedes Elektron in einem Atom trägt seinen Bahn-Drehimpuls L und seinen Spin-Drehimpuls S zum Gesamtdrehimpuls J des Atoms bei.
- wir betrachten den einfachsten Fall von Atomen mit einem einzelnen Elektron in der äussersten Schale, d.h. z.B. ein beliebiges Element der 1. Gruppe (H, Li, Na, K, ...) und Ionen wie z.B. He⁺, Be⁺, Mg⁺, B²⁺, Al²⁺ etc.

- in solchen Atomen ist der Gesamtdrehimpuls gegeben durch

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

- mit dem Betrag des Gesamtdrehimpuls J und den Quantenzahlen j

$$J = \sqrt{j(j+1)} \hbar$$

$$; j = l-s, \dots, l+s = l \pm \frac{1}{2}$$

- und der z-Komponente J_z und den Quantenzahlen m_j

$$J_z = m_j \hbar$$

$$; m_j = -j, -(j-1), \dots, j-1, j$$

- Es ist nicht nur der Gesamtdrehimpuls J sondern gleichzeitig auch der Bahndrehimpuls L und der Spin S quantisiert.
- Die gleichzeitige Quantisierung von L , S und J erlaubt nur bestimmte relative Ausrichtungen zwischen den einzelnen Drehimpulsen.
- Bei Atomen mit nur einem Elektron gibt es nur zwei mögliche Ausrichtungen.

11.7.1 Relative Ausrichtung von L und S in einem Atom mit einem Elektron

- zwei Möglichkeiten:

$$j = l + s$$

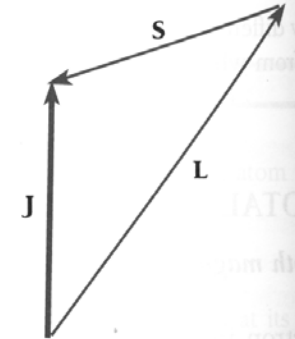
$$j = l - s$$

$$j > l$$

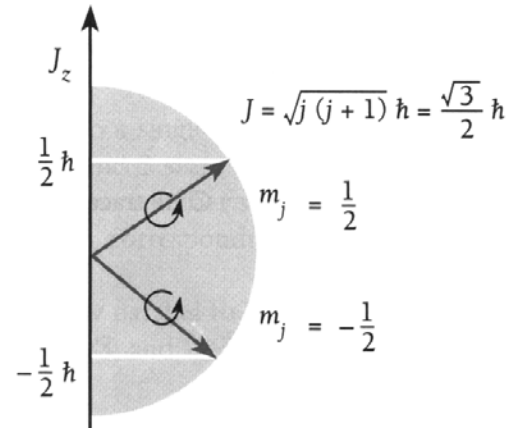
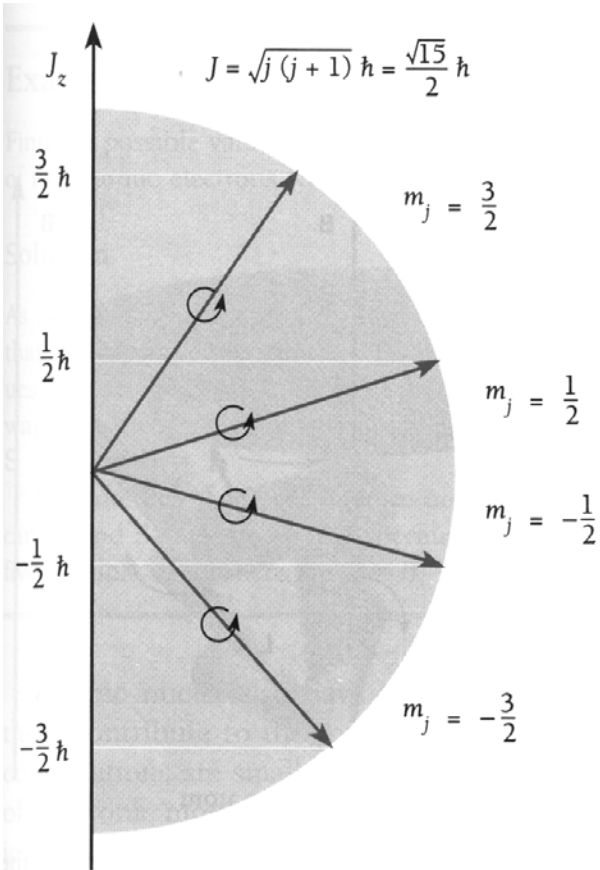
$$j < l$$



$$j = l + s = \frac{3}{2}$$



$$j = l - s = \frac{1}{2}$$

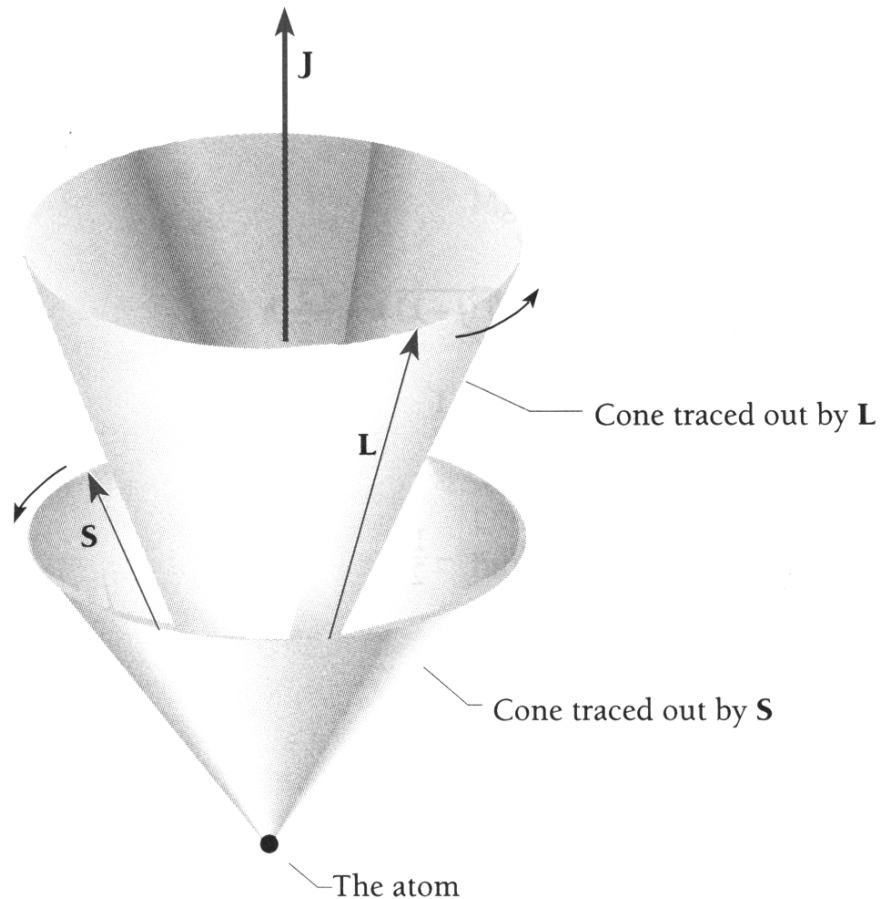


Quantisierung des Gesamtdrehimpuls J für die zwei Möglichkeiten der Kopplung zwischen L und S

11.8 Präzession der Drehimpulse

ohne von Außen angelegtes Feld:

- der Betrag und die Richtung von \mathbf{J} sind erhalten
- der Bahn-Drehimpuls \mathbf{L} und der Spin-Drehimpuls \mathbf{S} präzedieren um \mathbf{J}



mit externem Magnetfeld \mathbf{B} :

- \mathbf{J} präzediert um \mathbf{B}
- J_z ist quantisiert
- \mathbf{L} und \mathbf{S} präzedieren um \mathbf{J}
- dieser Eigenschaften bestimmen die Eigenschaften des anomalen Zeeman-Effekts

