

Physik IV 2009 - Übung 10

17. Mai 2009

1. Das Wasserstoffatom.

Σ 2

- (a) Wie ändert sich (unter Vernachlässigung der Spin-Bahn Kopplung) die Gesamtenergie des Elektrons im freien Wasserstoffatom in Abhängigkeit von l und m_l für fixes n ? Geben Sie die möglichen Werte von l und m_l an. Welche Bedeutung haben n , l und m_l ? [$\frac{1}{2}$]
- (b) Berechnen Sie den Erwartungswert der Gesamtenergie

$$\langle E \rangle = \left\langle -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \right\rangle$$

des $1s$ und des $2p$ Zustandes und ermitteln Sie die Übergangsfrequenz zwischen diesen beiden Zuständen. Verwenden Sie dazu die Wellenfunktion $\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$ mit

$$\begin{aligned} Y_{0,0} &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}} & R_{1,0} &= 2 \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} e^{-r/a_0} \\ Y_{1,0} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta & R_{2,0} &= 2 \left(\frac{1}{2a_0}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{r}{2a_0}\right) e^{-r/(2a_0)} \\ Y_{1,\pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{3}{\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi} & R_{2,1} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2a_0}\right)^{3/2} \left(\frac{r}{2a_0}\right) e^{-r/(2a_0)}. \end{aligned}$$

sowie die Formel

[$1\frac{1}{2}$]

$$\int_0^\infty r^n e^{-ar} dr = n!/a^{n+1}.$$

2. Bahndrehimpuls im Wasserstoffatom

Σ 2

(a) Berechnen Sie den Bahndrehimpuls $|\vec{L}|$ eines Elektrons im Wasserstoffatom für Zustände mit $l = 3$ und skizzieren Sie die möglichen magnetische Quantenzahlen in einem Vektordiagramm. [1]

(b) Ähnlich zu den Leiteroperatoren des harmonischen Oszillators lassen sich auch Drehimpuls-Leiteroperatoren durch $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$ definieren. Leiten Sie die Kommutatorrelation $[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm]$ her und benutzen Sie diese, um die Gültigkeit der folgenden Gleichung zu zeigen: [1/2]

$$\hat{L}_z \hat{L}_\pm = \hat{L}_\pm \hat{L}_z \pm \hbar \hat{L}_\pm.$$

(c) Nehmen Sie an, dass $|\phi_{m_l}\rangle$ ein Eigenzustand zum Operator \hat{L}_z mit Eigenwert $\hbar m_l$ ist. Benützen Sie die obigen Gleichungen um zu zeigen, dass die Zustände $\hat{L}_\pm |\phi_{m_l}\rangle$ Eigenzustände von \hat{L}_z zum Eigenwert $\hbar(m_l \pm 1)$ sind. [1/2]

3. Superposition von Wellenfunktionen des Wasserstoffatoms

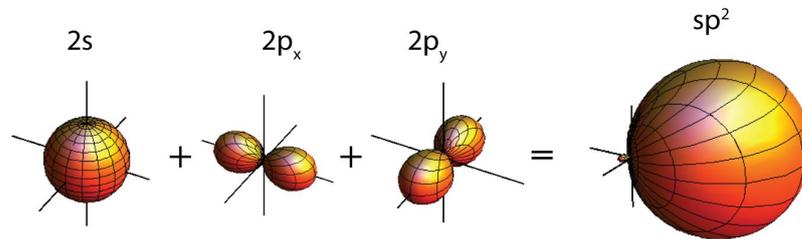
Σ 3

Jeder elektronische Zustand des Wasserstoffatom kann durch eine Linearkombination der Basiszustände $\psi_{n,l,m}(r, \theta, \phi) = R_{n,l}(r)Y_{l,m_l}(\theta, \phi)$ beschrieben werden.

(a) Zeigen Sie, dass die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der Zustände $\psi_{2,l,m}$ symmetrisch um die z-Achse sind. Was können Sie zusätzlich über die Symmetrie des $\psi_{2,0,0}$ Zustandes aussagen? [1 1/2]

(b) Bestimmte Superpositionszustände besitzen eine höhere Elektronendichte in einer Raumrichtung. Damit können Molekülbindungen beschrieben werden, da es dadurch zur Abschirmung der Kernladungen und dadurch zu einer attraktiven Kraft zwischen den an der Bindung beteiligten Atomen kommt. Finden Sie eine (normierte) Linearkombinationen der Zustände $\psi_{2,1,1}$ und $\psi_{2,1,-1}$, die zu einer um die x-Achse symmetrische Wellenfunktion $\psi_{2,1,x}$ führt. Zeigen Sie, dass dieser Zustand kein Eigenzustand des L_z -Operators mehr ist. [1 1/2]

(Anmerkung: Die Kombination der energetisch entarteten Zustände $\psi_{2,0,0} + \psi_{2,1,x} + \psi_{2,1,y}$ wird schliesslich als sp^2 -Hybridorbital bezeichnet (siehe Abbildung) und tritt z. B. bei der Bindung von Kohlestoff-Atome in Graphit auf.)



4. Atomare Übergänge und Zeeman Effekt

Σ 3

In einem Magnetfeld werden die atomaren Energieniveaus durch den Zeeman-Effekt um

$$\Delta E = \frac{eB}{2m_e} L_z \quad (1)$$

verschoben.

- (a) Übergänge zwischen den Energieniveaus sind nur dann erlaubt, wenn die Auswahlregeln $\Delta l = \pm 1$ and $\Delta m_l = 0, \pm 1$ erfüllt sind. Wie lauten die möglichen Übergänge zwischen der $n = 1$ und der $n = 2$ Schale des Wasserstoffatoms? [1]
- (b) Was wird bei einer spektroskopischen Messung dieser Übergänge beobachtet, wenn die Stärke des Magnetfeldes erhöht wird? [1]
- (c) Berechnen Sie die Zeeman-Aufspaltung der Spektrallinien in einem Magnetfeld von [1]
- i. $B = 10$ T.
 - ii. $B = 10^{-4}$ T (dem Erdmagnetfeld).