Physik IV 2009 - Übung 6

27. März 2009

1. **Die Wellenfunktion eines Teilchens** $\sum 2$

   Ein Teilchen befindet sich in einem eindimensionalen Kasten, dessen Kante von $x = 0$ nach $x = a$ reicht. Das Teilchen wird durch die Wellenfunktion $\Psi(x,t) = (Ae^{ikx} + Be^{-ikx})e^{-i\omega t}$ beschrieben.

   (a) Die Wahrscheinlichkeit $P = |\Psi|^2 = \Psi\Psi^*$ das Teilchen ausserhalb des Kastens bzw. an der Stelle $x = 0$ oder $x = a$ anzutreffen ist für alle Zeiten null. Die Gesamtwahrscheinlichkeit das Teilchen im Kasten zu finden ist natürlich eins. Berechnen Sie die Werte von A und B und leiten Sie eine Formel für k in Abhängigkeit von a her. [1]

   (b) Skizzieren Sie sowohl die Wellenfunktion als auch die Verteilungsfunktion der Aufenthaltswahrscheinlichkeit und erklären Sie deren Entwicklung in der Zeit. $[\frac{1}{2}]$

   (c) Welche kinetische Energie kann das Teilchen haben? $[\frac{1}{2}]$

2. **Zeitentwicklung eines Wellenpakets** $\sum 4$

   Ein freies Teilchen kann approximativ durch ein normiertes Gauss'sches Wellenpaket beschrieben werden:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{i(kx-\omega t)} dk$$

$$g(k) = \left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{1/4} e^{-a^2(k-k_0)^2/4}$$

(a) Berechnen Sie $\Psi(x,0)$ und $|\Psi(x,0)|^2$.
Hinweis: Vervollständigen Sie das Quadrat im Exponenten und verwenden Sie das Standardintegral [1]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2(\zeta+\beta)^2} d\zeta = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}$$

(mit komplexen Zahlen α und β).

(b) Die Breite der Gaussfunktion is definiert als der Punkt, an dem die Amplitude auf $1/\sqrt{e}$ abgefallen ist. Wie gross ist die Breite Δx und Δk von $\Psi(x,0)$ bzw. $g(k)$? Wie gross ist $\Delta x \Delta k$? [$\frac{1}{2}$]

(c) Zeigen Sie unter Verwendung der nichtrelativistische Dispersionrelation $\omega(k) = \hbar k^2/2m$, dass die zeitabhängige Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ die folgende Form hat:

$$\Psi(x,t) = C \exp[ik_0 x] \exp\left[\frac{-(x-\hbar k_0 t/m)^2}{a^2 + 2i\hbar t/m}\right],$$

wobei C eine zeitabhängige komplexe Amplitude ist. Verwenden Sie dabei dieselbe Integrationsmethode wie in (a). [2]

(d) Geben Sie eine Formel für $\Delta x(t)$ und $\Delta k(t)$ an und skizzieren Sie das Produkt $\Delta x \Delta k$ als Funktion der Zeit t. Diskutieren Sie den Zusammenhang mit der Heisenberg'schen Unschärferelation? [$\frac{1}{2}$]

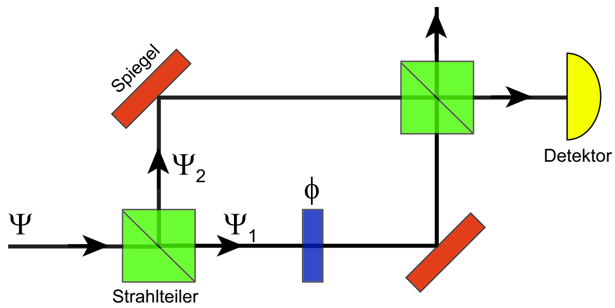
3. Heisenberg'sche Unschärferelation $\sum 3$

(a) Natrium Atome ${}^{23}_{11}$Na sollen durch Streuung von Licht detektiert werden. Welche Energie müssen die einfallenden Photonen haben, um die Teilchen auf 100 nm genau zu lokalisieren? Wie gross ist in etwa die Temperatur nach dieser Messung? [1]

(b) Zeigen Sie unter Benutzung der Heisenbergschen Unschärferelation, dass die Grundzustandsenergie eines harmonischen Oszillators durch $E_0 = h\nu/2$ gegeben ist. [1]

(c) Der Natrium D_2-Übergang vom angeregten Zustand ($3^2\mathrm{P}_{3/2}$) zum Grundzustand ($3^2\mathrm{S}_{1/2}$) mit der Energiedifferenz 2.105 eV hat eine Lebensdauer von $\tau = 16$ ns. Berechnen Sie die (i) absolute und (ii) relative Frequenzunschärfe der emittierten Photonen. Warum sind die üblicherweise beobachteten Linienbreite viel breiter als diese natürliche Liniebreite? [1]

4. **Materiewellen-Interferometrie** $\sum 2$



In Analogie zur Lichtoptik können auch für Materiewellen (Elektronen, Neutronen, Atome) Interferometer konstruiert werden. Ein sogenanntes Mach-Zehnder Interferometer ist in der obigen Abbildung angedeutet. Teilchen können nun auf zwei gleich wahrscheinlichen Wegen zum Detektor zu gelangen. Durch das Einfügen eines Phasenschiebers in einen Pfad des Interferometers wird die Weglänge und dadurch die Phase der Wellenfunktion um $\phi = k\Delta = 2\pi\Delta/\lambda$ geändert, wobei λ die Wellenlänge des Teilchens und Δ proportional zur Dicke des Phasenschiebers ist.

(a) Berechnen Sie die Detektionswahrscheinlichkeit eines Teilchen in Abhängigkeit von Δ. Für welches ϕ ist die Wahrscheinlichkeit null und wohin fliegen die Teilchen in diesem Fall? $[1\frac{1}{2}]$

(b) Nehmen Sie an, der einfallende Teilchenstrahl habe eine Impulsverteilung δk. Was beobachten Sie für $\delta k \gg 2\pi/\Delta$? $[\frac{1}{2}]$