Physik IV 2009 - Übung 7

3. April 2009

1. **Spektren wasserstoffänhlicher Atome.** $\sum 1\frac{1}{2}$
Wenn sowohl Kern- als auch Elektronenmasse in die Berechnungen für das Bohrsche Atommodell miteinbezogen werden, muss die Rydberg-Formel leicht abgeändert werden:

$$\frac{hc}{\lambda} \approx \frac{\mu}{m_e} R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right).$$

$\mu = (m_e m)/(m_e + m)$ ist hier die reduzierte Elektronenmasse, m_e und m die Masse des Elektrons bzw. des Kerns und die Rydberg-Energie $R = R_\infty hc = 2.18 \times 10^{-18}$ J.

   (a) In der Balmer-Serie des Wasserstoffatoms können zwei Linien mit einer Wellenlänge von $\lambda = 656.29$ nm bzw. $\lambda = 656.47$ nm beobachtet werden. Berechnen Sie die zugehörigen Übergänge im Wasserstoffspektrum. Welche Linien erwarten Sie für Wasserstoff und woher kommt die zweite Linie? Diese Erkenntnis führte 1934 zum Nobelpreis für Chemie. [1]

   (b) Nehmen Sie an, dass die Elektronen auf den inneren Schalen nur insofern berücksichtigt werden müssen, dass sie die Ladung des Kerns neutralisieren. Benennen Sie die Rydberg-Serie mit der höchste Energie für Mg^+-Ionen. Wie gross ist die längste Wellenlänge eines Überganges dieser Serie? $[\frac{1}{2}]$

2. **Korrespondenzprinzip** $\sum 2\frac{1}{2}$
Das Korrespondenzprinzip besagt, dass im Grenzfall groser Quantenzahlen ein Quantensystem durch das korresponierende klassische Modell beschrieben werden kann. Bohr formulierte dieses Prinzip zur Berechnung der diskreten Energieniveaus des Wasserstoffatoms.

(a) Zeigen Sie, dass die (Kreis-)frequenz $\omega = \Delta E/\hbar$ der beim Übergang eines Elektrons von einer (klassischen) Bahn mit Radius r zu einer benachbarten Bahn mit Radius r' durch

$$\omega_{qm} \sim \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2\hbar}\frac{\Delta r}{r^2}$$

gegeben ist, wobei $\Delta r = r - r' \ll r$ gilt. [1]

(b) Zeigen Sie, dass bei klassischer Betrachtungsweise, die Frequenz der abgestrahlten Energie eines Elektron auf einer Bahn mit Radius r durch folgende Formel gegeben ist:

$$\omega_{class}^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{m_e r^3}.$$

Berechnen Sie Δr durch Gleichsetzen von ω_{class} und ω_{qm}. [$\frac{1}{2}$]

(c) Aus (b) folgt die Relation $\Delta r = 2(a_0 r)^{1/2}$. Diese Gleichung kann gelöst werden, wenn r als Funktion von n zur x-ten Potenz angesetzt wird, d.h. $r = cn^x$, wobei n eine ganze Zahl ist. Berechnen Sie x und c. [1]

3. **Bohr Modell für Exzitonen** $\sum 1$

Gebundene Elektron-Loch Paare in Halbleitern (Exzitonen) können näherungsweise durch das Bohrsche Atommodell beschrieben werden.

Berechnen Sie den Bohr'schen Exzitonenradius und die Bindungsenergie in Germanium. Verwenden Sie hierzu die reduzierte Masse μ^* der effektiven Massen der Elektronen und Löcher $m_e^* \sim 0.082 m_e$ and $m_h^* \sim 0.043 m_e$. Beachten Sie ausserdem, dass die Dielektrizitätskonstante des Vakuums durch die Dielektrizitätskonstante des Halbleitermaterials $\epsilon_r = 15.8$ modifiziert werden muss. [1]

4. **Ionisationsenergie** $\sum 1\frac{1}{2}$

Die Ionisationsenergie ist die Arbeit, die verrichtet werden muss, um ein Elektron eines Atoms im Grundzustand zu entfernen. Für das freie Wasserstoffatom beträgt diese Energie -13.6 eV.

Das Anlegen eines elektrischen Feldes verändert die potentielle Energie um einen zusätzlichen Term $V_{stark} = Fz$ und führt zu einem Sattelpunkt des Potentials. Berechnen Sie Änderung der Ionisationsenergie eines Wasserstoffatoms, wenn ein Feld von $F = 40$ kV/m entlang der z-Achse angelegt wird. Nehmen Sie dabei an, dass die Grundzustandsenergie unverändert bleibt und vernachlässigen Sie Tunnelprozesse. [$1\frac{1}{2}$]

5. **Emission und Absorption von Strahlung** $\sum 3\frac{1}{2}$

In einem Behälter mit Temperatur T befindet sich ein Ensemble von N Atomen. Nehmen Sie an, dass nur zwei Energieniveaus mit einer Übergangsfrequenz von 10 GHz für die folgende Rechnung relevant sind.

(a) Wie gross ist der Anteil der Atome im höherliegenden Energieniveau, wenn sich das Ensemble im thermischen Gleichgewicht bei Raumtemperatur befindet? $[\frac{1}{2}]$

(b) Bei welcher Gleichgewichtstemperatur T_0 befinden sich 99% der Atome im unteren Energieniveau? $[\frac{1}{2}]$

(c) Geben Sie die Gleichungen zur Beschreibung der Besetzungszahlen N_0 und N_1 der beiden Energieniveaus in Abhängigkeit von den Einstein-Koeffizienten A und B, der Gesamtzahl der Atome N und der Übergangsfrequenz ν an.

Die Atome werden in einen Nicht-Gleichgewichtszustand präpariert, in dem sich $N_1 = N_1(0)$ Atome im oberen Energieniveau befinden. Zeigen Sie, dass die Besetzung des oberen Energieniveaus zur Zeit t durch

$$N_1(t) = e^{-h\nu/k_BT} + (N_1(0) - e^{-h\nu/k_BT})e^{-\gamma t}$$

mit $\gamma = \frac{1+e^{-h\nu/k_BT}}{1-+e^{-h\nu/k_BT}}A$ gegeben ist. [2]

(d) Bei welcher Temperatur ist die Zerfallsrate γ um das Zehnfache grösser als bei $T = 0$? $[\frac{1}{2}]$