Physik IV 2009 - Übung 8

24. April 2009

1. **Wellenfunktion als Wahrscheinlichkeitsverteilung** $\sum 2$

   Ein Teilchen besitze im Ortsraum die Wellenfunktion ($a < 0$)

$$u(x) = \begin{cases} Axe^{-ax} & \text{für} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x < 0. \end{cases}$$

   Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Messung des Impulses ein Wert zwischen $-\hbar a$ und $\hbar a$ gefunden wird? [2]

   Hinweis: Benutzen Sie dabei die Formeln

$$\int (\xi^2 + \alpha^2)^{-2} d\xi = \frac{\xi}{2\alpha^2(\xi^2 + \alpha^2)} + \frac{1}{2\alpha^3} \arctan \frac{\xi}{\alpha} + C$$

   und

$$\int_0^{+\infty} d\xi \xi^n e^{-\xi} = n!$$

2. **Erwartungswert von Observablen** $\sum 2$

   Ein Teilchen befindet sich in einem eindimensionalen Kastenpotential

$$\begin{array}{ll} V(x) = 0 & 0 < x < a \\ V(x) = +\infty & \text{sonst.} \end{array}$$

   Berechnen Sie den Erwartungswert von x und die Unschärfe $(\Delta x)^2$, wenn sich das Teilchen im $n-$ten Energieeigenzustand befindet. Zeigen sie schliesslich, dass diese Mittelwerte für $n \to \infty$ in die klassisch zu erwartenden Werte übergehen. [2]

3. **3D Potentialtopf** $\sum 2$

Ein Teilchen befindet sich in einem dreidimensionalen kubischen Potentialtopf der Seitenlänge a. Die potentielle Energie ist durch

$$\begin{array}{ll} V(x,y,z) = 0 & 0 < x < a,\ 0 < y < a,\ 0 < z < a \text{ und} \\ V(x,y,z) = \infty & \text{sonst} \end{array}$$

gegeben.

(a) Lösen Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung und finden Sie einen allgemeinen Ausdruck für die Energie-Eigenfunktionen des Teilchens als Funktion der Quantenzahlen n, p und q bezüglich der drei Dimensionen x, y und z. [1]

(b) Wie lauten die möglichen Energien des Teilchens? [$\frac{1}{2}$]

(c) Welche Entartung weisen die ersten drei Energieniveaus auf? [$\frac{1}{2}$]

4. **Drehimpuls-Kommutatorrelationen** $\sum 1$

Leiten Sie die folgenden Kommutatorrelationen her. Was bedeuten diese? [1]

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z \qquad [\hat{L}_x, \hat{y}] = i\hbar\hat{z} \qquad [\hat{L}_x, \hat{p}_y] = i\hbar\hat{p}_z$$
$$[\hat{L}_x, x] = [\hat{L}_x, \hat{p}_x] = [\hat{L}_x, \hat{L}^2] = [\hat{L}_x, \hat{r}^2] = [\hat{L}_x, \hat{p}^2] = 0$$

5. **Schrödinger Gleichung** $\sum 3$

Betrachten Sie ein Teilchen in einem eindimensionalen Potentialtopf

$$\begin{array}{ll} V(x) = 0 & 0 < x < L \\ V(x) = \infty & \text{sonst.} \end{array}$$

(a) Zeigen Sie ausgehend von der zeitunabhängigen Schrödingergleichung, dass die normierten Eigenfunktionen zur Quantenzahl n,

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\frac{n\pi x}{L}$$

lauten. [1]

—

Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird eine Potentialbarriere von unendlicher Höhe und endlicher sehr kleiner Breite (kein δ-Potential) plötzlich an die Position $X = L/3$ gesetzt. Damit wird das Potential in zwei unabhängige Potentialtöpfe geteilt.

(b) Wie lauten die normierten Wellenfunktionen ϕ_n^L und ϕ_m^R der Eigenzustände des linken bzw. des rechten Potentialtopfes zu einem späteren Zeitpunkt $t > 0$? $[\frac{1}{2}]$

(c) Ein Teilchen befindet sich im Zustand $\psi_3(x)$ des Potentials in Teil (a) unmittelbar bevor die Potentialbarriere eingefügt wird. Zeigen Sie, dass die neue Wellenfunktion $\tilde{\Psi}(x)$ des Teilchens *nachdem* die Barriere eingefügt worden ist als Superposition von zwei neuen Eigenzustände geschrieben werden kann. Berechnen Sie dazu explizit $\tilde{\Psi}(x)$ mit Hilfe der unten stehenden Relation. [1]

(d) Erklären Sie – ohne explizite Berechnung – wie sich die Wellenfunktion $\tilde{\Psi}(x)$ ändert, wenn sich das Teilchens zum Zeitpunkt $t < 0$ im Zustand $\phi_2(x)$ befindet. $[\frac{1}{2}]$

$$\int_0^X dx \sin \frac{m\pi x}{X} \sin \frac{n\pi x}{X} = \frac{X}{2}\delta_{mn}$$