Physik IV 2009 - Übung 9

8. Mai 2009

1. **Harmonischer Oszillator und Grundzustandsenergie** $\sum 3$

   (a) Der Grundzustand der Wellenfunktion eines harmonischen Oszillators (Potential $U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$) ist durch

   $$\psi_0(x) = Ce^{-\alpha x^2/2}$$

   gegeben. Zeigen Sie, dass diese Wellenfunktion eine Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung darstellt und berechnen Sie sowohl die Normierungskonstante C als auch die Grundzustandsenergie E_0. [1]

   (b) Berechnen Sie die quantenmechanische Unschärfe des Orts Δx und des Impulses Δp im Grundzustand und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Heisenberg'schen Unschärferelation. [1]

   (c) Ein Pendel mit einer Masse von 1 g am Ende eines masselosen Fadens der Länge 250 mm oszilliert mit einer Frequenz von $\omega = \sqrt{g/l}$. Wie gross ist die quantenmechanische Grundzustandsenergie? Wie leicht können diese Oszillationen detektiert werden? $[\frac{1}{2}]$

   (d) Das Pendel schwingt mit einer kleinen Amplitude, bei der sich die Masse maximal 1 mm oberhalb seiner Gleichgewichtsposition befindet. Wie lautet die entsprechende Quantenzahl? $[\frac{1}{2}]$

2. **Harmonischer Oszillator II.** $\sum 2\frac{1}{2}$

Der Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators kann mit Hilfe der Leiteroperatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ wie folgt geschrieben werden:

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right).$$

Die Leiteroperatoren erfüllen die Kommutatorrelation $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$.

(a) Zeigen Sie unter Verwendung der obigen Gleichung:
Ist ein Zustand ψ_n ein Eigenzustand des harmonischen Oszillators zur Energie $\hbar\omega(n + 1/2)$, dann sind $\hat{a}\psi_n$ und $\hat{a}^\dagger\psi_n$ ebenfalls Eigenzustände des harmonischen Oszillators. Wie lauten die entsprechenden Energien dieser Zustände? [1]

(b) Für den Grundzustand ψ_0 gilt $\hat{a}\psi_0 = 0$. Wie gross ist die Energie dieses Zustands? $[\frac{1}{2}]$

(c) Die Leiteroperatoren können in der Form

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p} \right)$$

geschrieben werden. Welchen physikalischen Grössen entsprechen die Operatoren $(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2$ und $(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2$? $[\frac{1}{2}]$

(d) Leiten Sie durch Anwendung des Leiteroperators $a^\dagger$ auf den Grundzustand $\psi_0(x) = Ce^{-\alpha x^2/2}$ die Wellenfunktion des ersten angeregten Zustandes des harmonischen Oszillators her und skizzieren Sie diese. $[\frac{1}{2}]$

3. **Superpositionsprinzip** $\sum 2\frac{1}{2}$

Zur Präparation des Zustands eines Teilchens in einem harmonischen Oszillatorpotentials mit der fundamentalen Frequenz ω_0 steht maximal ein Energiequant zur Verfügung, d.h. $\hbar\omega$. Ein Teilchen in einem harmonischen Oszillatorpotential soll nun so präpariert werden, dass seine Aufenthaltswahrscheinlichkeit für $x > 0$ maximal wird.

(a) Berechnen Sie den Zustand für den die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Bereich $x > 0$ maximal wird? $[1\frac{1}{2}]$

(b) Ist dieser ein Eigenzustand des Hamiltonoperators? Begründen Sie. Wie ändert sich dieser Zustand in der Zeit? [1]

4. **Messprozess und nicht-kommutierende Observablen** $\sum 2$

Die Observable A besitzt die Eigenfunktionen ψ_1 und ψ_2 mit den Eigenwerten a_1 und a_2. Eine weitere Observable B besitzt die Eigenfunktionen ϕ_1 und ϕ_2 mit Eigenwerten b_1 und b_2, die mit den Eigenfunktionen von A im folgenden Zusammenhang stehen:

$$\phi_1 = (\psi_1 + 2\psi_2)/\sqrt{5} \quad \phi_2 = (2\psi_1 - \psi_2)/\sqrt{5}.$$

Bei einer Messung von B wird der Wert b_1 gemessen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei einer darauffolgenden Messung von A die Werte a_1 bzw. a_2 zu erhalten? B wird daraufhin nochmals gemessen, wie hoch ist diesmal die Wahrscheinlichkeit den Wert b_1 zu finden?