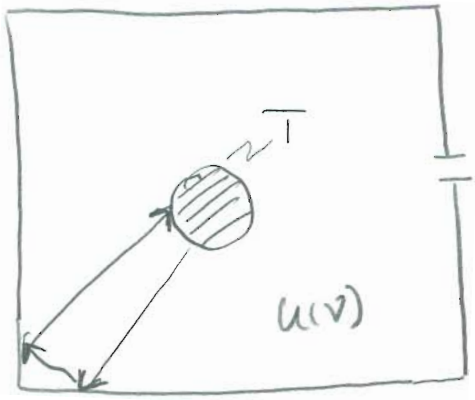
Wärmestrahlung (Temperaturstrahlung, Schwarze Strahlung) (1)

- Jeder Körper bei endlicher Temperatur T emittiert elektromagnetische Strahlung
  - Beispiele: - Sonne
    - Glühbirne
    - Bogenlampe
- Strahlung entsteht durch thermisch angeregte Schwingungen von Ladungen (Elektronen, Atomkerne, Ionen)
- Die Schwingungen der vielen Freiheitsgrade ($\mathcal{O}(10^{23})$) sind stark gekoppelt. Dies führt zu einem kontinuierlichen Strahlungsspektrum.
- Das Spektrum hängt von der Temperatur T und der Dimension (1D, 2D, 3D) des Körpers ab, nicht aber von seiner detaillierten Struktur.
  - Beispiel: 1D: Rohr bei niedriger $T \sim 4K$
    $\lambda \gg$ Abmessungen des Rohrs.

    3D: Sonne ($T \sim 6000K$)
    $\lambda \ll$ Abmessungen
- Die quantenmechanischen Eigenschaften des Lichts werden zur Erklärung des Spektrums benötigt (Planck, 1900)

hier: phänomenologische Beschreibung des Spektrums

Strahlungsgleichgewicht:



Körper bei Temperatur T im abgeschlossenen Hohlraum mit reflektierenden Wänden

- Vom Körper emittierte Strahlung trifft nach einigen Reflexionen wieder auf Körper und wird absorbiert.

  ⇒ emittierte Strahlungsleistung = absorbierte Strahlungsleistung

  ⇒ Temperatur T des Körpers ändert sich nicht.

  ⇒ stationärer Zustand: Strahlungsgleichgewicht

- Im Hohlraum herrscht eine spektrale Energiedichte u(ν) des elektromagnetischen Feldes, die nur von der Temperatur des Köpers abhängt.

$$u(\nu)d\nu = W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \varepsilon_0 E^2$$

W: Strahlungsenergie pro Volumen

$u(\nu)d\nu$: Strahlungsenergie pro Volumen und Frequenzintervall = spektrale Energiedichte

- Die Verteilung der Strahlungsenergie $u(\nu)$ ist homogen (hängt nicht von Ort ab) und isotrop (hängt nicht von der betrachteten Raumrichtung ab).

• Schwarzer Strahler

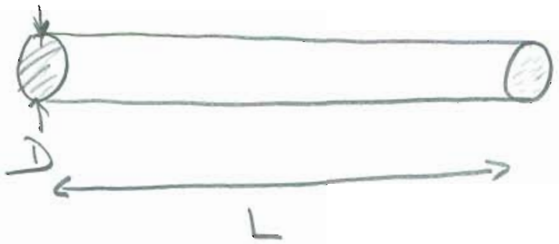
- Körper der für alle Frequenzen ν sämtliche auftreffende Strahlung absorbiert (Absorptionskoeffizient $A(\nu) = 1$) und nichts reflektiert (Reflexionskoeffizient $R(\nu) = 0$).

⇒ realisiert durch zuvor besprochenen Hohlraum mit sehr kleiner Öffnung.

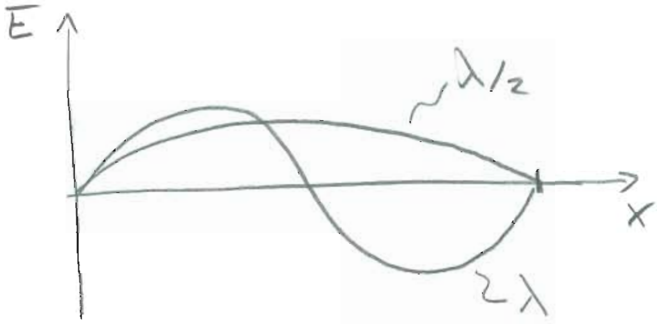
⇒ vernachlässigbarer Teil der Strahlung wird emittiert (Strahlungsgleichgewicht wird beibehalten) keine zusätzliche Strahlung wird absorbiert (von Aussen).

⇒ Energiedichte $u(\nu)$ hängt nur von Temperatur T ab.

Der 1-Dimensionale Schwarze Strahler



- Rohr mit Länge $L \gg \lambda$ und Durchmesser $D \ll \lambda$



- elektromagnetische Energie wird gespeichert in Moden (stehenden Wellen) der Wellenlänge λ

- <u>Berechne Energiedichte $u(\nu)$:</u>

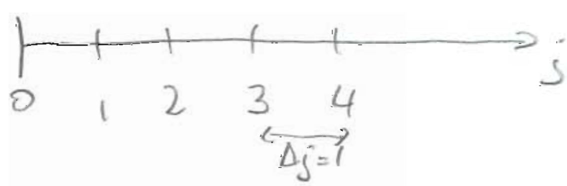
  1. bestimme die Anzahl G der möglichen Moden
  2. bestimme die Energie pro Mode
  3. bestimme Gesamtenergie durch summieren über die Moden unter Berücksichtigung der Besetzungswahrscheinlichkeit

1. Resonanzbedingung für 1D Strahler

$$j \frac{\lambda_j}{2} = L$$

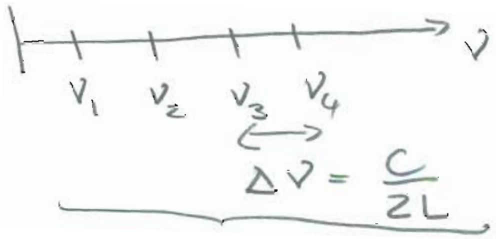
mit Modenindex $j = 1, 2, 3, \ldots$

$\Delta j = 1$



- j-abhängige Frequenz der Mode

$$\nu_j = \frac{c}{2L}\, j$$



Modenspektrum

- Frequenzabstand der Moden

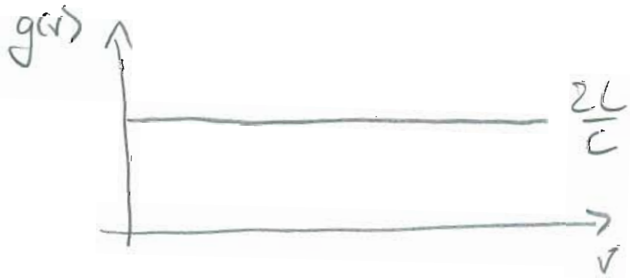
$$\Delta\nu = \nu_{j+1} - \nu_j = \frac{c}{2L}$$

- Zahl der Moden bis Frequenz ν

$$G(\nu) = \frac{\nu}{\Delta\nu} = \frac{2L}{c}\,\nu$$

- Spektrale Modendichte

$$g(\nu) = \frac{\partial G(\nu)}{\partial \nu} = \frac{2L}{c} = \text{const.}$$



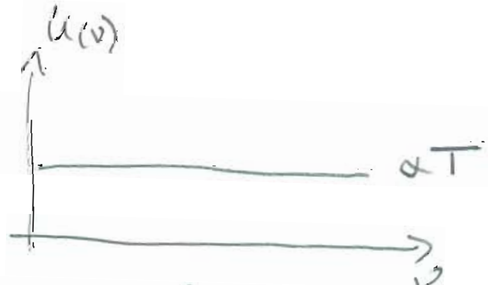
Konstante Modendichte im 1D

$$G(\nu_{max}) = \int_0^{\nu_{max}} g(\nu)\, d\nu$$: Gesamtzahl der Moden bis Frequenz ν_{max}

(2) Energie pro Freiheitsgrad in der Mode im thermischen Gleichgewicht (Gleichverteilungssatz) $\frac{1}{2} k_B T$ (x2 pro Mode)

Energie pro Frequenzintervall

$$u(\nu) = g(\nu)\, k_B T = \frac{2L}{c}\, k_B T = \text{const.}$$



$$u = \int^{\infty} u(\nu)\, d\nu$$ divergiert $\Rightarrow$ Ultraviolettkatastrophe

- im quantenmechanischen Fall

$$\boxed{U(\nu) = g(\nu)\; h\nu \; f(\nu)}$$

— quantenmechanische mittlere Energie pro Mode

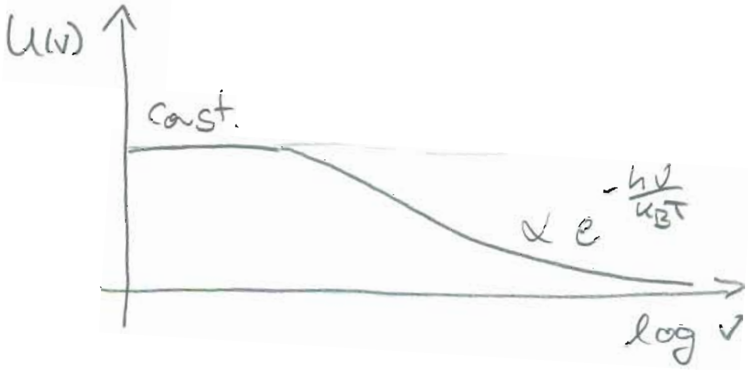
Energie pro Photon

Besetzungswahrscheinlichkeit der Mode nach Planck

$$= \boxed{\frac{2L}{c}\; h\nu \; \frac{1}{e^{h\nu/k_BT} - 1}}$$

Bose-Einstein Verteilungsfunktion

- Spektrum:



Planck'sches Strahlungsgesetz in 1D

- Energiedichte

$$u(\nu) = \frac{U(\nu)}{L}$$

normiert bzgl. Länge des Strahlers

Grenzfälle der Energiedichte des Feldes bei niedrigen Frequenzen $h\nu \ll k_B T$ und bei hohen Frequenzen $h\nu \gg k_B T$

- Rayleigh-Jeans Gesetz (1D) $h\nu \ll k_B T$

$$e^{\frac{h\nu}{k_B T}} \sim 1 + \frac{h\nu}{k_B T} + \dots$$ Taylor-Entwicklung

$$\boxed{u(\nu) = k_B T \frac{2}{c}}$$

kl. Grenzfall bei kleinen Frequenzen ν und hohen T

- Wiensches Gesetz (1D) $h\nu \gg k_B T$

$$e^{h\nu/k_B T} \gg 1$$

$$\boxed{u(\nu) = h\nu\, e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} \frac{2}{c}}$$

bei großem ν und kleinen T

- Stefan-Boltzmann Gesetz:

über das Spektrum integrierte Gesamtenergiedichte des Schwarzen Strahlers.

$$u = \int_0^\infty u(\nu)\, d\nu = \int_0^\infty \frac{2}{c} h\nu \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}\, d\nu$$

$$= \frac{2}{c} (k_B T)^2 \frac{1}{h} \underbrace{\int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1}\, dx}_{= \pi^2/6}$$

$$\boxed{= \frac{\pi^2}{3} \frac{k_B^2}{hc} T^2}$$

integrierte Energiedichte hängt nur von T ab!