Materiewellen

Wdh.: Eigenschaften von Photonen

- Teilcheneigenschaften
  - Energie $E = h\nu$
  - Impuls $p = \frac{h\nu}{c}$
- Welleneigenschaften
  - Beugung
  - Interferenz

  $\}$ bestimmt durch Amplitude A und Phase ϕ der elektromagnetischen Welle
- Verknüpfung zwischen Wellen- und Teilcheneigenschaften

> Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Photons am einem gegebenen Ort ist proportional zum Quadrat der Amplitude der elektromagnetischen Welle.

- Ruheenergie des Photons $E_0 = m_0 c^2 = 0$
  Ruhemasse des Photons $\Rightarrow m_0 = 0$

In der Quantenmechanik besteht für massebehaftete Teilchen (z.B. Elektronen, Protonen, Neutronen, Atomkerne, Moleküle, ...) ein ähnlicher Zusammenhang

> Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Teilchens ist proportional zum Quadrat der Amplitude einer sogenannten Materiewelle.

- Materiewellen wurden 1923 von de Broglie als mathematisches Konzept zur Berechnung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit von Teilchen postuliert

  - Wellenlänge einer Materiewelle

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p}}$$

p: Impuls des Teilchens

  - Analogie zum Photon

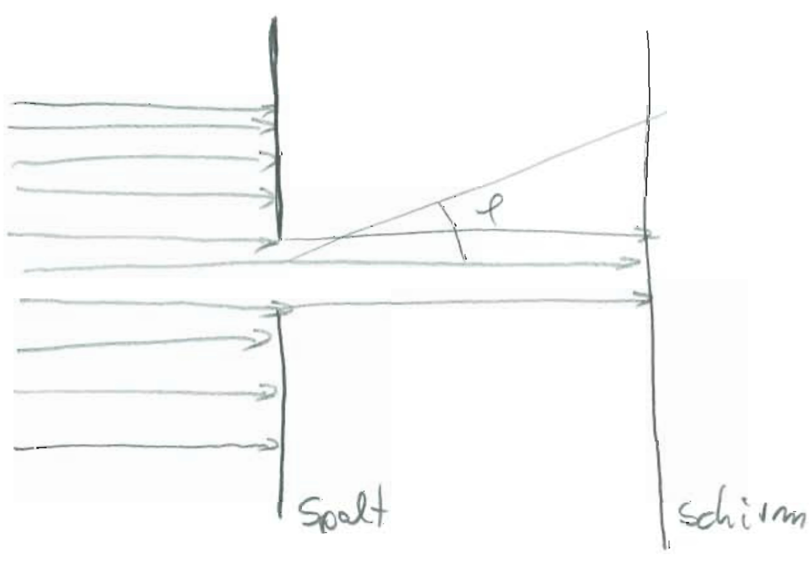
$$\lambda = \frac{c}{\nu} = h\frac{c}{h\nu} = \frac{h}{p}$$

- Nachweis von Materiewellen in Beugungs- und Interferenzexperimenten mit Elektronen, Neutronen etc.

  - Davisson - Germer etc. (Coulomb-WW)
  - Neutronenbeugung (magnetische WW, Kernkräfte)

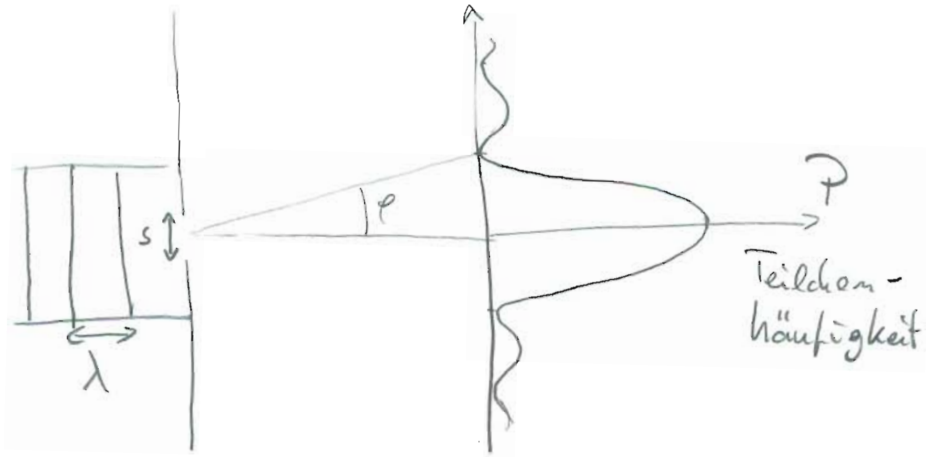
Beugung und Interferenz von Materiewellen

- klassischer Grenzfall



klassisch: Es treffen nur unter dem Winkel $\boxed{\varphi = 0}$ durch den Spalt tretende Teilchen auf dem Schirm auf.

Materiewelle am Spalt



S: Spaltbreite
λ: Materie-wellenlänge

Teilchenhäufigkeit:

- proportional zum Quadrat der Amplitude der Materiewelle

$$P \propto \frac{\sin^2 X}{X^2} \qquad \text{mit} \qquad X = \frac{\pi S}{\lambda} \sin\varphi$$

- ⇒ Nullstellen $\quad X = n\pi = \frac{\pi S}{\lambda} \sin\varphi$

$$\Rightarrow \sin\varphi = n\frac{\lambda}{S}$$

- klassischer Grenzfall $\varphi = 0$ für

$$\frac{\lambda}{S} = \frac{h}{pS} = \frac{h}{m_0 v S} \to 0$$

⇒ Teilchen mit grossem Impuls $m_0 v$ verhalten sich klassisch

Beispiel:
- $m_0 = 10^{-3}\,kg, \quad v = 10^{-2}\,\frac{m}{s}, \quad S = 10^{-2}\,\frac{m}{s}$

$$\Rightarrow \sin\varphi = 0.66\ 10^{-26} \sim 0$$

- Elektron $\quad E_{kin} = 54\,eV, \quad S = 0.5\,mm$

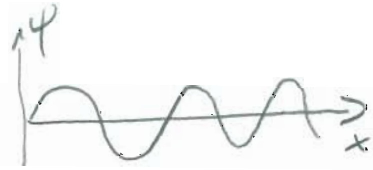
$$\Rightarrow \lambda = 0.167\,mm$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin\varphi = 0.67} \quad \text{Beugung beobachtbar}$$

Bemerkung: – Beugung ist für einzelne Teilchen beobachtbar. Die de Broglie Welle gibt die Aufenthaltswahrscheinlichkeit korrekt an.

Die Wellenfunktion ψ

- harmonische Welle längs der x-Achse



$$\psi(x,t) = A\, e^{i(kx - \omega t)}$$

mit $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{p}{\hbar}$ — de Broglie Beziehung — mit $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

k: Wellenvektor

– Wellenfunktion ψ ist komplex

– $\boxed{\text{Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens am Ort } x \text{ zur Zeit } t \text{ ist gegeben durch das Betragsquadrat der Wellenfunktion } |\psi|^2 = \psi\psi^*}$

Postulat

mit $\boxed{E = \hbar\omega}$ (ähnlich wie beim Photon)

E: Gesamtenergie des Teilchens
ω: Frequenz der de Broglie Welle

folgt $\boxed{\psi(x,t) = e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}}$

Wellenpakete

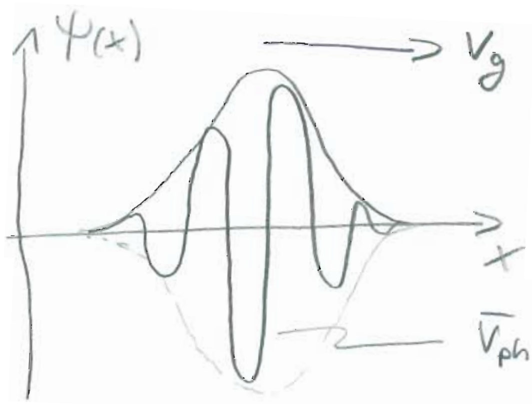
- ebene Welle $\qquad \psi = A\, e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}$

  - Aufenthaltswahrscheinlichkeit des durch ψ beschiebenen Teilchens

$$|\psi|^2 = \psi\psi^* \propto A^2 = \text{const.}$$

$\Rightarrow$ gleichmässig über gesamte x-Richtung verteilt

- Wellenpaket



$$v_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0}$$

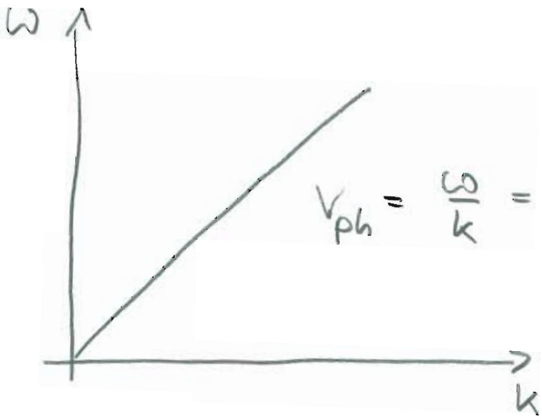
$$\bar{v}_{ph} = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}$$

mittlere Phasengeschwindigkeit

- Superposition von ebenen Wellen
- $\psi\psi^*$ ist entlang x-Richtung lokalisiert
- die Gruppengeschwindigkeit des Wellenpakets ist die Teilchengeschwindigkeit $v_g = \frac{d\omega}{dk} = v$
- die Phasengeschwindigkeit der Materiewelle

$$\boxed{v_{ph} = \frac{\omega}{k}}$$

- ohne Dispersion



$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \text{const.}$$

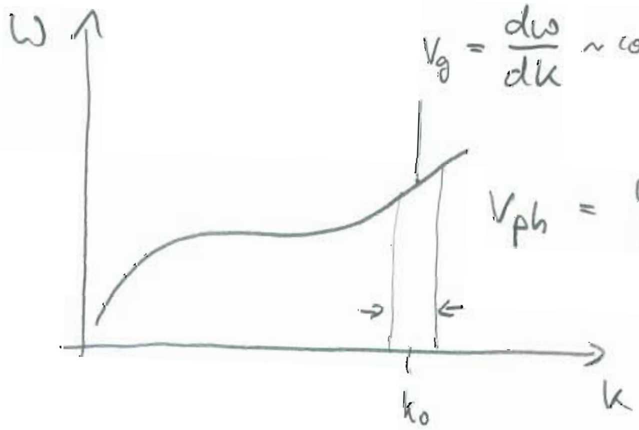
lineare Abhängigkeit der Frequenz $\omega = 2\pi\nu$ vom Wellenvektor $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

(gilt z.B. für Licht im Vakuum)

- Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \text{const.} \frac{d}{dk} k = \text{const} = v_{ph}$$

- mit Dispersion



$v_g = \frac{d\omega}{dk} \sim \text{const.}$ bei $k = k_0$

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} \neq \text{const.}$$

- ω ist nichtlineare Funktion von k

- Gruppengeschwindigkeit v_g variiert mit Wellenvektor k des Wellepakets (äquivalent mit ν, λ)

Phasengeschwindigkeit von Materiewellen

- Phasengeschwindigkeit für harmonische Wellen

$$\boxed{v_{ph} = \lambda \nu = \frac{\omega}{k}}$$

- für Materiewellen gilt

mit $\lambda = \frac{h}{p}$ und $\nu = \frac{E}{h}$

$$\boxed{v_{ph} = \frac{E}{p}}$$

- für relativistische Teilchen gilt

$$p = \gamma m_0 v$$

$$E = \gamma m_0 c^2$$

mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

v: Teilchengeschwindigkeit

m_0: Ruhemasse

daher folgt

$$\boxed{v_{ph} = \frac{c^2}{v}}$$

- Phasengeschwindigkeit der Materiewelle ist immer größer als Lichtgeschw.
- v_{ph} ist umgekehrt proportional zur Teilchengeschwindigkeit

⇒ Phasengeschwindigkeit der Materiewelle hat nur Konsequenzen, die auch klassisch beschrieben werden könnten, z. B. Brechung. Die Planck-Konstante hat keinen Einfluss auf v_{ph}.

Dispersion von Materiewellen

- klassische Teilchengeschwindigkeit v sollte identisch sein mit der Gruppengeschwindigkeit v_g der zugehörigen Materiewelle

$$\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp}}$$

mit $E = \hbar\omega$ und $p = \hbar k$

– für nichtrelativistische Teilchen gilt

$$E = \frac{p^2}{2m} + U$$

– potentielle Energie U sei keine Funktion des Impuls p

$$\Rightarrow \boxed{v_g = \frac{d}{dp}\frac{p^2}{2m} = v}$$

– für relativistische Teilchen gilt

$$E = \sqrt{m_0^2c^4 + p^2c^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_g = \frac{dE}{dp} = \frac{c^2 p}{\sqrt{m_0^2c^4 + p^2c^2}} = v}$$

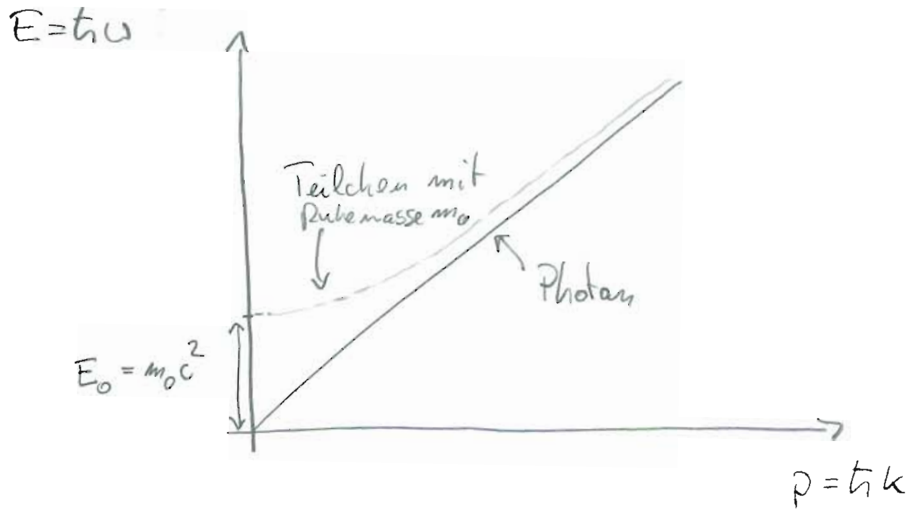
mit $p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$\Rightarrow$ Sowohl relativistisch als auch nicht-relativistisch ist die Gruppengeschwindigkeit v_g der Materiewelle identisch der Teilchengeschwindigkeit v.

Energie - Impuls - Beziehung

- für Materieteilchen $E = c\sqrt{m_0^2c^2 + p^2}$

- für Photonen $E = cp$



- beim Photon im Vakuum gilt $\boxed{v_g = v_{ph} = c}$, d.h. es zeigt sich keine Dispersion. Wellenpakete bei beliebigen Frequenzen haben dieselbe Gruppengeschwindigkeit.

- massebehaftetes Teilchen zeigt Dispersion, d.h. verschiedene Frequenzkomponenten eines Wellenpakets haben verschiedene Ausbreitungsgeschwindigkeiten.