Vorlesung

Friday, March 20, 2009

1:42 PM

Materiewellen

$$\psi(x,t) = A \cdot e^{-i(kx-\omega t)}$$

$$E_{kin} = \frac{p^2}{2m}, \quad p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \Rightarrow E_{kin} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \hbar\omega$$

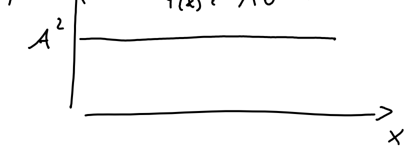
Dispersionsrelation: $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m} \quad \left(v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} = v_\phi(k)!\right)$

Dispersionsrelation Licht: $\omega = ck$ ... linear $(v_\phi = c = \text{const.})$

Born-Regel:

$$P(x,t) = |\psi(x,t)|^2$$

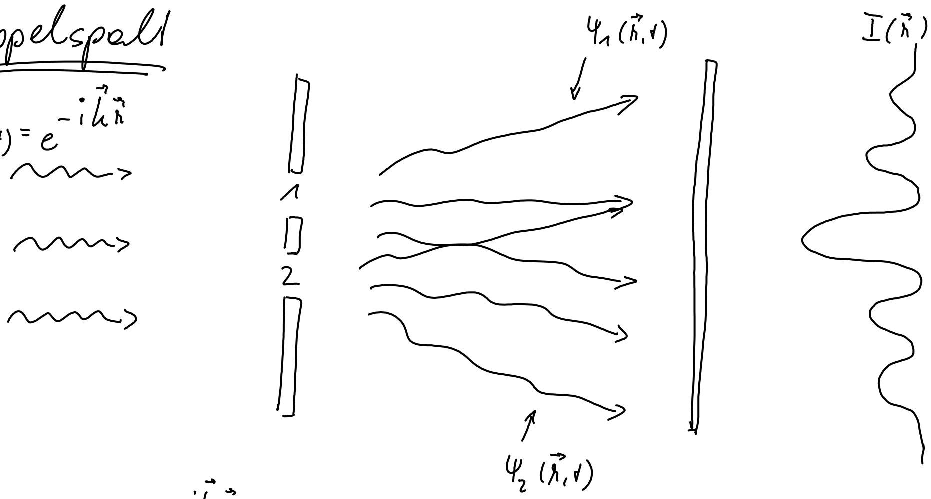
z.B.: $\psi(x) = Ae^{-i(kx-\omega t)}$



$\Rightarrow$ Teilchen mit fixer Wellenlänge ist völlig delokalisiert!

Doppelspalt

$$\psi(\vec{r},t) = e^{-i\vec{k}\vec{r}}$$

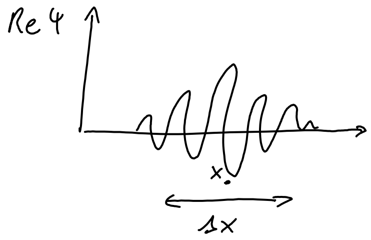


$$\psi_1(\vec{r},t) = \psi_0 e^{-i\vec{k}_1\vec{r}}$$
$$\psi_2(\vec{r},t) = \psi_0 e^{-i\vec{k}_2\vec{r}}$$

$$\begin{aligned}
I(\vec{r}) = |\psi(\vec{r},t)|^2 &= |\psi_1(\vec{r},t) + \psi_2(\vec{r},t)|^2 = \\
&= (\psi_1 + \psi_2)(\psi_1 + \psi_2)^* \\
&= \psi_1\psi_1^* + \psi_2\psi_2^* + \psi_1^*\psi_2 + \psi_2^*\psi_1 \\
&= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \psi_1^*\psi_2 + (\psi_1^*\psi_2)^* \\
&= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\psi_1^*\psi_2 \\
&= \boxed{|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \underbrace{2|\psi_1||\psi_2|\cos\delta}_{\text{Interferenzterm}}}
\end{aligned}$$

Heisenberg'sche Unschärferelation

Wellenpaket zum Zeitpunkt $t=0$:



$$\Psi(x,t) = A e^{-i(k_0 x - \omega t)} e^{-(x-x_0)^2/2\Delta x^2}$$

mit $\int_{-\infty}^{\infty} dx \, |\Psi(x,t_0)|^2 = 1$ zur Bestimmung von A

$\Rightarrow$ lokalisiert im Ort um x_0

$\Rightarrow$ Wellenlängenverteilung

Fouriertransformation:

$$\Psi(x) = \Psi(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \, e^{-ikx} f(k)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) e^{ik'x} dx = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-i(k-k')x}}_{\delta(k-k')} f(k)}_{f(k')}$$

$$\Rightarrow A \int e^{-i(k_0-k')x} e^{-(x-x_0)^2/2\Delta x^2} dx = e^{-(k'-k_0)^2 \frac{\Delta x^2}{2}} e^{ik'x} e^{ik_0 x_0}$$

$$\propto e^{-\frac{(k'-k_0)^2}{2\Delta k^2}} e^{ik'x}$$

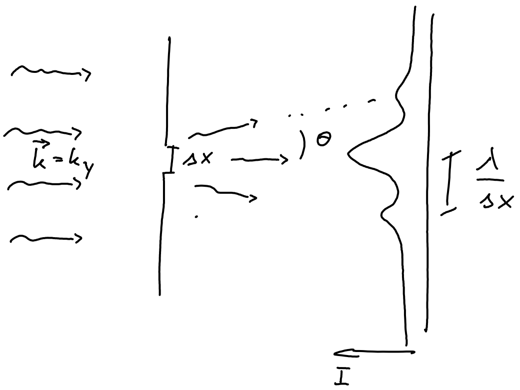
$$\Rightarrow \Delta x = \frac{1}{\Delta k} \rightarrow \boxed{\Delta x \Delta k = 1}$$

Ortsunschärfe

Impulsunschärfe

$$p = \hbar k \rightarrow \boxed{\Delta x \Delta p \approx \hbar}$$

*) Bsp 1: Beugung am Spalt:

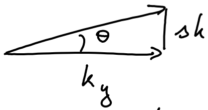


$$I(\theta) = I(0) \; \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}\Delta x \sin\theta\right)}{\frac{\pi}{\lambda}\Delta x \sin\theta}$$

*) einfallende ebene Welle wird am Spalt gebeugt

*) die Streuung in x-Richtung hängt von der Breite des Spaltes Δx ab

*) Abschätzung:



$$\tan\theta = \frac{\Delta k}{k_y}$$

aus der Gleichung für die Beugung am Spalt ergibt sich für das 1. Interferenzmaximum

$$\theta = \frac{\lambda}{\Delta x}$$

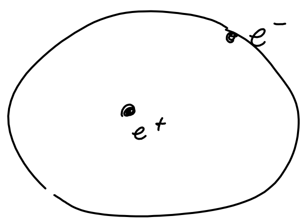
$$\Rightarrow \tan\theta \approx \theta = \frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{\Delta k}{k_y}$$

$$\Delta k \, \Delta x = k_y \lambda = 2\pi$$

$$\boxed{\Delta p \, \Delta x = h}$$

*) Eine Messung oder Präparation der Position eines Teilchens ist mit einer Unschärfe von Δp im Impuls verknüpft.

*) Bsp 2: Stabile Atome (naive Betrachtungsweise)



Energie des Elektrons im Orbit rund um den Kern:

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

$$= \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

$$F_{ZF} = F_C \quad \text{(Zentrifugalkraft = Coulombkraft)}$$

$$ma = m\omega^2 r = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

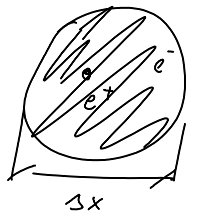
$$\omega^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{mr^3}$$

$$E = \frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

klassisch: $r \to 0$; $E \to -\infty$, d.h. Minimierung der Energie führt zu instabilen Atomen, weil Elektron in den Kern stürzt.

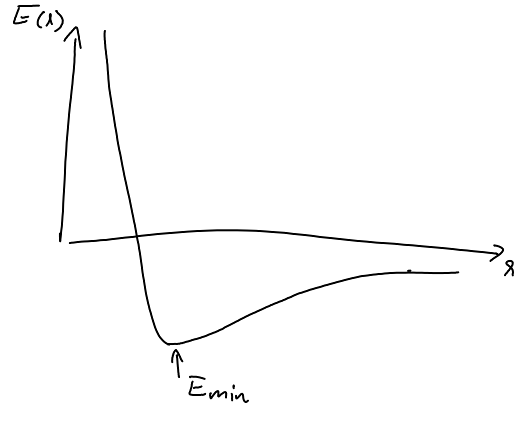
Quantenmechanik: $E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$

Kreisbahn mit Radius $r \mathrel{\hat{=}}$ Ortsunschärfe $r \sim \Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p}$



$\Rightarrow$ Impuls $p \sim \Delta p \sim \frac{\hbar}{r}$

$$E \sim \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$



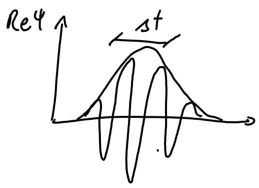
E_{min}: $\frac{dE}{dr} = 0$:

$$-\frac{\hbar^2}{mr^3} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\hbar^2 4\pi\varepsilon_0}{me^2} \equiv a_0 \text{ .. Bohrradius}$$

Unschärferelation von Energie & Zeit:

$$\boxed{\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}}$$

Wellenpaket lokalisiert in Zeit:



$$\Psi(x_0,t) = \Psi(t) = A e^{-i(k_0 x_0 - \omega_0 t)} e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\Delta t^2}}$$

$$\tilde{\Psi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t) e^{-i\omega t} dt \propto e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2}\Delta t^2}$$

$$\Rightarrow \Delta\omega = \frac{1}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta\omega \Delta t = 1$$

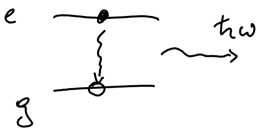
mit $E = \hbar\omega$: $\boxed{\Delta E \Delta t = \hbar}$

Ein Zustand, der nur für eine endliche Zeit Δt existiert, besitzt eine Unschärfe in seiner Energie von ΔE.

oder:

> Klassischer Energieerhaltungssatz kann im Zeitraum Δt um $\frac{\hbar}{\Delta E}$ verletzt werden.

=> Bsp 1: Spontaner Zerfall von angeregten Atomen



typ. Lebensdauer des angeregten Zustands τ

=> Strahlungsquelle existiert nur für best. Zeitraum τ

=> Energieunschärfe $\Delta\omega \cdot \tau \geq \frac{1}{2}$

=> Photonenenergie verteilt um ω_0 mit Breite $\Delta\omega$

=> Umkehrschluss: Energieniveau e hat keine klar definierte Energie