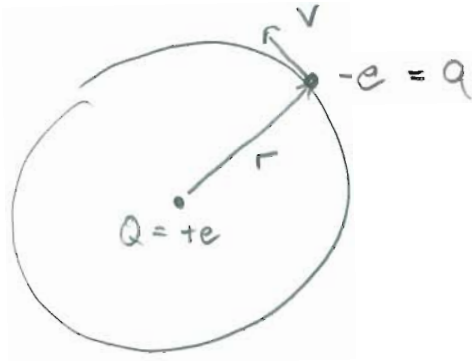


- klassisches Modell für Bahnbewegung des Elektrons im Wasserstoff-Atom



r : Bahnradius
 v : Bahngeschwindigkeit
 $q = -e$: Elektronladung
 $Q = +e$: Kernladung

- stabile Bahn bei Kräftegleichgewicht $\vec{F}_c + \vec{F}_z = 0$

$$\vec{F}_c = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{Coulomb-Kraft}$$

$$\vec{F}_z = \frac{mv^2}{r} \quad \text{Zentripetal-Kraft}$$

für Bahngeschwindigkeit

$$v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m r}} \quad (*)$$

bei gegebenem Bahnradius r

- Bestimmung des Bahnradius r aus Messung der Bindungsenergie des \bar{e} im Wasserstoff-Atom

- Gesamtenergie des \bar{e}

$$\begin{aligned}
 E &= E_{\text{kin}} + \bar{E}_p \\
 &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}
 \end{aligned}$$

Kinetische und potentielle Energie des \bar{e} auf der Bahn

$$= -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} < 0$$

im Gleichgewicht (*)

- Bindungsenergie

$$E = - \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} < 0$$

- maximale Ionisationsenergie des H-Atoms

$$E_1 = -13.6 \text{ eV} \quad \text{Messwert}$$

- resultierender Bahnradius des e^-

$$r_1 = - \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 E_1} \approx 0.5 \text{ \AA} = 0.05 \text{ nm}$$

⇒ gute Abschätzung des tatsächlichen mittleren Bahnradius des e^-

• Strahlungsverluste

- Nach klassischer Elektrodynamik verliert das e^- auf seiner Bahn Energie durch Dipolstrahlung mit einer Rate, die von seiner Bahnbeschleunigung a abhängt.

$$\text{Strahlungsleistung} \quad P = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} a^2$$

mit

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m r^2}$$

$$P \approx 2.9 \cdot 10^{10} \frac{\text{eV}}{\text{s}}$$

⇒ e^- sollte nach wenigen Nanosekunden im dem Kern gefallen sein

⇒ Quantenmechanik bestimmt den minimalen mittleren Bahnradius, der nicht unterschritten werden kann.

- betrachte die **Broglie Materiewellenlänge** des e^- auf klassischer **Bahn** um den Atomkern

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \quad \text{mit } v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 r_1 m}}$$

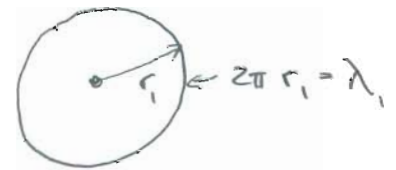
$$\text{und } r_1 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 E_1}$$

E_1 : Ionisationsenergie

r_1 : minimaler Bohrradius

$$\lambda_1 = 3.3 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

$$\stackrel{!}{=} 2\pi r_1$$



\Rightarrow die Broglie Wellenlänge entspricht gerade der Länge der Umlaufbahn des Elektrons

\rightarrow konstruktive Interferenz der Materiewelle des e^- mit sich selbst

\Rightarrow die Bewegung des e^- auf dieser Bahn erfolgt strahlungslos

• Bohr'sches Atommodell

- für das e^- im Wasserstoff-Atom sind nur solche **Bahnradien** r_n erlaubt für die die konstruktive Interferenzbedingung der Materiewelle des e^- gilt

$$\boxed{n \lambda = 2\pi r_n}$$

$$n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

wobei n : Hauptquantenzahl

r_n : n ter Bohrradius

mit

$$m \frac{h}{e} \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 \Gamma_m}{m}} = 2\pi \Gamma_m$$

folgt

$$\boxed{\Gamma_m = m^2 \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m e^2}} \quad (*) \quad \text{für } m = 1, 2, 3, \dots$$

$$= m r_1$$

mit

$$r_1 = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m} \quad \text{Bohr-Radius}$$

- Quantisierung des Betrags des Bahndrehimpuls \vec{L}

$$\boxed{|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = \Gamma_m m v_m}$$

$$= m e \sqrt{\frac{\Gamma_m}{4\pi\epsilon_0 m}} \quad \text{mit } \Gamma_m (*)$$

$$\boxed{= m h}$$

\Rightarrow wichtiger Aspekt der Quantenmechanik:

Drehimpulse sind in Einheiten von h quantisiert

Energieniveaus des e^- im Wasserstoff-Atom

- Gesamtenergie des e^- in Abhängigkeit vom quantisierten Bahnradius r_m

$$E_m = - \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_m} = - \frac{m e^4}{8 h^2 \epsilon_0^2} \frac{1}{m^2}$$
$$= - \frac{R_{oc}}{h} \frac{1}{m^2}$$

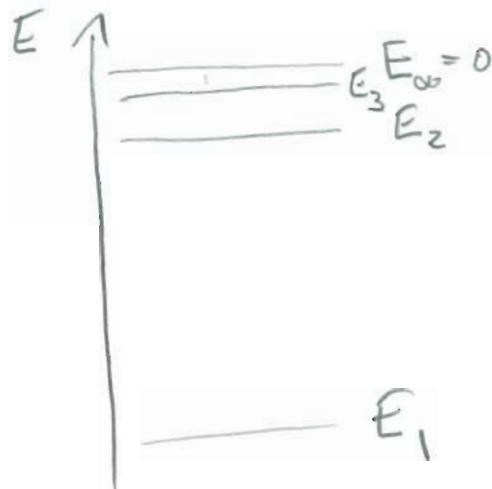
Quantisierung
der Energie



$m = 1, 2, 3, \dots$

mit Rydberg-Konstante $R_y = \frac{R_{oc}}{h} = 13.6 \text{ eV}$

- E_m mit $m = 1, 2, 3, \dots, \infty$ sind die für das e^- im Wasserstoffatom erlaubten Energieniveaus.
- E_1 ist die Energie des Grundzustands zur Hauptquantenzahl $m = 1$
- $E_{2,3,4,\dots}$ sind die Energien der angeregten Zustände des e^- im Wasserstoff-Atom



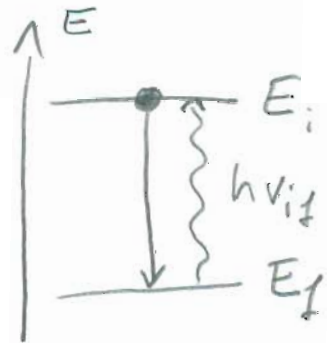
$$E_m = -R_y \frac{1}{m^2}$$

- Berechnung der Frequenzen der Spektrallinien für Übergänge zwischen elektronischen Zuständen im Wasserstoff-Atom.

$$h \nu_{if} = E_i - E_f \\ = R_y \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

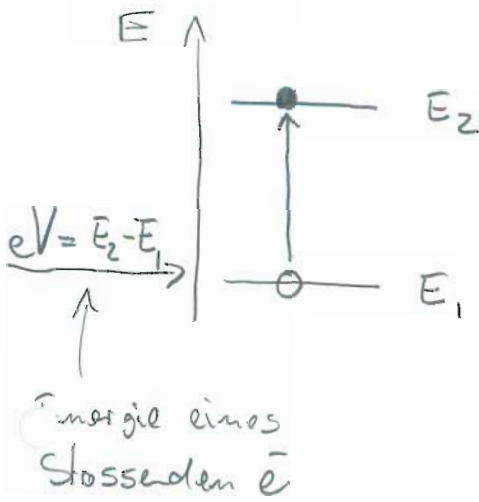
↳ erklärt phänomenologische Rydberg-Formel im Bohr-Modell

↳ beim Übergang eines Elektrons zwischen zwei Zuständen mit den erlaubten Energien E_i und E_f wird ein einzelnes Photon der Energie $h \nu_{if}$ erzeugt.

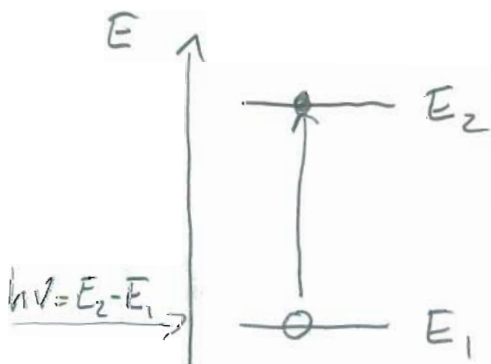


Anregung von Atomen

- durch **Stoss** mit anderen Atomen oder mit Elektronen

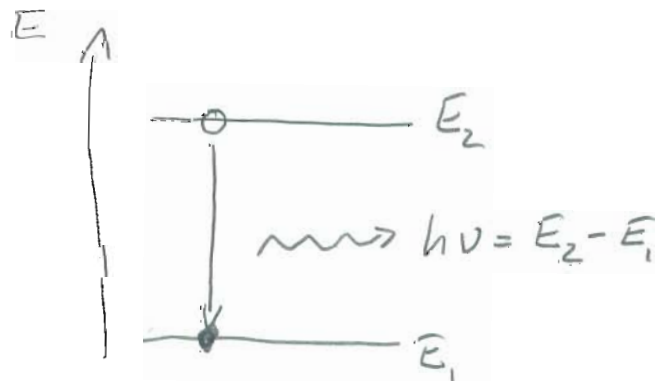


- durch **Absorption** von Photonen

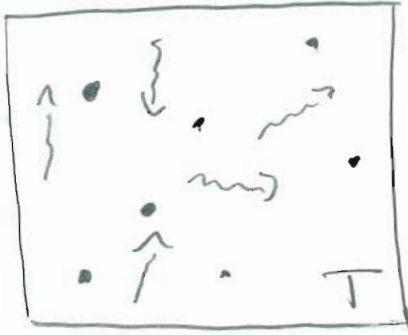


Zerfall von angeregten elektronischen Zuständen in Atomen

- **spontane Emission** (Vakuumfluktuationen)
- **induzierte Emission** (Photonen)
- **Stöße** (Elektronen, Atome)



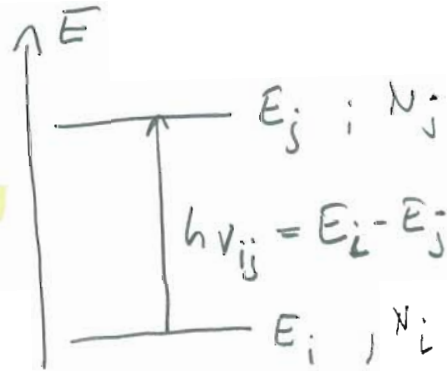
Absorption, spontane und induzierte Emission im thermischen Gleichgewicht



betrachte N Atome im thermischen Gleichgewicht mit einem Strahlungsfeld der Energiedichte $u(\nu)$ bei Temperatur T

- Atome mit Energieniveaus E_i und E_j und Übergangsfrequenz

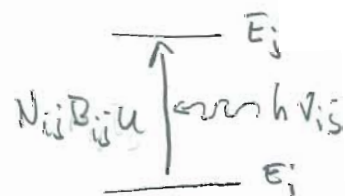
$$\nu_{ij} = \frac{E_j - E_i}{h}$$



- N_i : Anzahl der Atome in Zustand E_i
- N_j : Anzahl der Atome in Zustand E_j
- $N = N_i + N_j$: Gesamtzahl der Atome

- Anzahl N_{ij} der Atome, die durch Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld u einen Übergang von E_i nach E_j durch Absorption eines Photons machen

$$N_{ij} = N_i B_{ij} u(\nu_{ij})$$



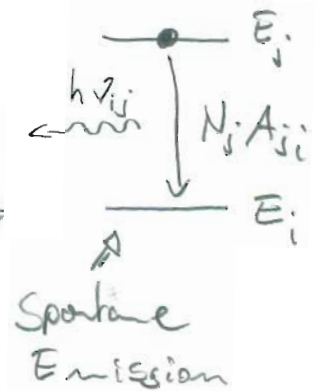
B_{ij} : Absorptionswahrscheinlichkeit eines Atoms (Einstein B-Koeffizient) proportional zur Zahl der Photonen bei Frequenz ν_{ij}

- Anzahl der Atome, die einen Übergang von E_i nach E_j durch **spontane** oder **induzierte Emission** machen

$$N_{ji} = N_j (A_{ji} + B_{ji} u(\nu_{ij}))$$

A_{ij} : **Einstein A-Koeffizient** :

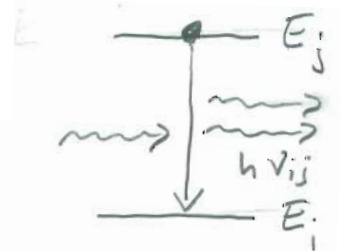
Wahrscheinlichkeit, daß ein Atom **spontan** ein Photon der Frequenz ν_{ij} emittiert



B_{ji} : **Einstein B-Koeffizient** :

Wahrscheinlichkeit, daß ein Atom durch Wechselwirkung mit einem Photon zur Emission eines weiteren Photons **stimuliert** wird.

stimulierte Emission \rightarrow



- Im **thermischen Gleichgewicht** ist die Zahl der emittierenden und absorbierenden Atome identisch

$$N_{ij} = N_{ji}$$

- daraus ergibt sich für die Energiedichte des Feldes

$$u(\nu_{ij}) = \frac{A_{ji}}{B_{ji}} \frac{1}{\frac{N_i}{N_j} \frac{B_{ij}}{B_{ji}} - 1}$$

mit der Zahl der Atome im Grundzustand E_i gegeben durch die klassische Boltzmann-Verteilung

$$N_i = C e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$$

und im angeregten Zustand E_j

$$N_j = C e^{-\frac{E_j}{k_B T}}$$

ergibt sich

$$\frac{N_i}{N_j} = e^{\frac{E_j - E_i}{k_B T}} = e^{\frac{h\nu_{ij}}{k_B T}}$$

mit gleichen Wahrscheinlichkeiten für die Absorption und die stimulierte Emission

$$B_{ij} = B_{ji}$$

findet man

$$u(\nu_{ij}) = \frac{A_{ji}}{B_{ji}} \frac{1}{e^{\frac{h\nu_{ij}}{k_B T}} - 1}$$

Planck'sches Strahlungsgesetz nach Einstein

Verhältnis von spontaner zu stimulierter Emission

$$\frac{A_{ji}}{B_{ji}} = \frac{8\pi h \nu_{ij}^3}{c^3}$$

← Modendichte
* Energie pro Mode

→ starke Frequenzabhängigkeit der spontanen Emission
→ spontane Emission ist stimuliert durch Vakuumfeld.

Bemerkungen: • Drei fundamentale Prozesse kontrollieren die Wechselwirkung von Licht und Atomen

- spontane Emission
- Absorption
- stimulierte Emission

• Diese Phänomene erklären die Struktur des Planck'schen Strahlungsgesetzes.

• Stimulierte Emission wird in LASERN zur Erzeugung von kohärentem Licht eingesetzt