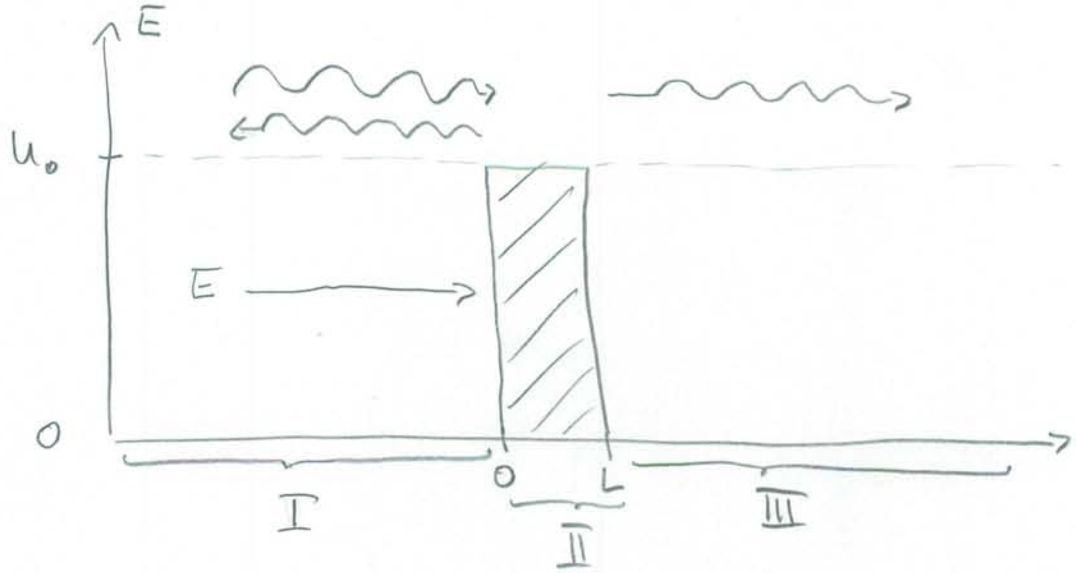
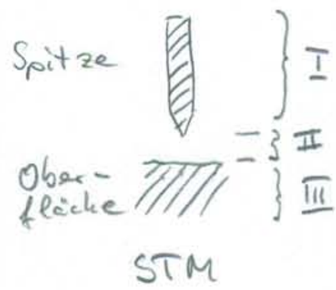
Der Tunneleffekt



Potential $V(x)$



Betrachte Teilchen mit Energie $E < U_0$

- Schrödinger-Gleichung in Regionen I, II, III

$$\mathrm{I}: \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_{\mathrm{I}} = E\,u_{\mathrm{I}}$$

$$\mathrm{II} \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_{\mathrm{II}} + U_0 u_{\mathrm{II}} = E\,u_{\mathrm{II}}$$

$$\mathrm{III}: \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_{\mathrm{III}} = E\,u_{\mathrm{III}}$$

Zeige analytische Lösung in MMA.

- Die Lösungen in I, II, III

$$\mathrm{I}: \quad u_{\mathrm{I}} = \underbrace{A e^{ik_{\mathrm{I}}x}}_{\text{einfallende Welle}} + \underbrace{B e^{-ik_{\mathrm{I}}x}}_{\text{reflektierte Welle}} \quad \text{mit } k_{\mathrm{I}} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\mathrm{II}: \quad u_{\mathrm{II}} = C e^{k_{\mathrm{II}}x} + D e^{-k_{\mathrm{II}}x} \quad \text{mit } k_{\mathrm{II}} = \frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}$$

zerfallende Wellenfunktion in der Barriere

$\overline{\text{III}}$: $\quad u_{\text{III}} = \underbrace{F e^{i k_{\text{III}} x}}_{\text{rechtslaufende Welle}} + \underbrace{\cancel{G e^{-i k_{\text{III}} x}}}_{\text{linkslaufende Welle}} \quad$ mit $k_{\text{III}} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = k_{\text{I}}$

Wie berechnet man bei bekannter Wellenfunktion u den Transmissions Koeffiziente?

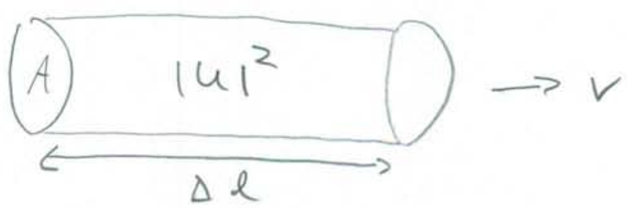
- betrachte den Teilchenfluss S zur Berechnung des Reflexions bzw. Transmissions Koeffizienten

$$S = |u|^2 v$$

v: Teilchengeschwindigkeit

$|u|^2$: Wahrscheinlichkeitsdichte

Vgl. Stromprobleme:



- Transmissionswahrscheinlichkeit oder Transmissions koeffizient

$$T = \frac{|u_{\text{III}}|^2 v_{\text{III}}}{|u_{\text{I}}|^2 v_{\text{I}}} \approx \frac{F F^*}{A A^*} \frac{v_{\text{III}}}{v_{\text{I}}}$$

- Bestimme Koeffizienten A, B, C, D, F aus Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{I}}(0) &= u_{\text{II}}(0) \\ u_{\text{II}}(L) &= u_{\text{III}}(L) \end{aligned}\right\} \text{stetige Aufenthaltswahrscheinlichkeit}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_{\text{I}}}{\partial x}(0) &= \frac{\partial u_{\text{II}}}{\partial x}(0) \\ \frac{\partial u_{\text{II}}}{\partial x}(L) &= \frac{\partial u_{\text{III}}}{\partial x}(L) \end{aligned}\right\} \text{stetiger Teilchenfluss}$$

- Lösung der Gleichungen nach $\frac{A}{F}$:

$$\frac{A}{F} = \left[\frac{1}{2} + \frac{i}{4}\left(\frac{k_{II}}{k_I} - \frac{k_I}{k_{II}}\right)\right] e^{(ik_I + k_{II})L}$$
$$+ \left[\frac{1}{2} - \frac{i}{4}\left(\frac{k_{II}}{k_I} - \frac{k_I}{k_{II}}\right)\right] e^{(ik_I - k_{II})L}$$

⇒ Vereinfachung für den Fall kleiner Teilchenenergie E gegenüber Barrierehöhe U_0

① $E \ll U_0 \Rightarrow k_{II} \gg k_I$

$$\Rightarrow \frac{k_{II}}{k_I} - \frac{k_I}{k_{II}} \approx \frac{k_{II}}{k_I}$$

② $e^{k_{II}L} \gg e^{-k_{II}L}$

$$\Rightarrow \frac{A}{F} \approx \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{4}\frac{k_{II}}{k_I}\right) e^{(ik_I + k_{II})L}$$

- damit ergibt sich der Transmissionskoeffizient für $v_{III} = v_I$ zu

$$T = \frac{FF^*}{AA^*} = e^{-2k_{II}L}\left(\frac{16}{4 + \underbrace{\left(\frac{k_{II}}{k_I}\right)^2}_{=\frac{U_0}{E}-1}}\right)$$

$$k_{II} = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$$

Diskussion des Ergebnis. Abhängigkeit von Masse m, Barrierenhöhe und Breite U_0 und L und Teilchenenergie.

⇒ starke exponentielle Energie- und Längenabhängigkeit des Transmissionskoeffizienten

Fragestellung: Unter welchen Bedingungen ist der Erwartungswert $\langle\hat{F}\rangle$ einer Observablen $\hat{F}$ scharf bestimmt?

$$\langle\hat{F}\rangle = \int \psi^* \hat{F} \psi \, dx$$

Scharf bedeutet hier, dass die Varianz $(\Delta F)^2$ des Erwartungswertes verschwindet.

$$(\Delta F)^2 = \langle (F - \langle\hat{F}\rangle)^2 \rangle = 0$$

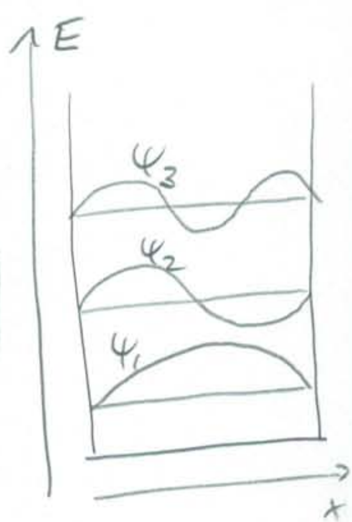
Welche Beziehung muss zwischen der Wellenfunktion ψ, die den Zustand des Systems beschreibt und dem Operator $\hat{F}$ gelten?

Beispiel: Teilchen im Potentialtopf

$$\hat{H}\psi_n = E_n \psi_n$$

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n x \pi}{a}\right)$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$



Wann ist $\langle\hat{H}\rangle = \int \psi^* \hat{H} \psi \, dx$ scharf bestimmt, d.h. für welche ψ ist $(\Delta E)^2 = 0$?

Eigenwerte und Eigenfunktionen von Observablen

- Scharfe und unscharfe Erwartungswerte einer Observablen F.

- Für ein Teilchen im Zustand Ψ_0 ist der Erwartungswert $\langle F \rangle$ einer Observablen F scharf, wenn bei wiederholter Messung an identisch gleich präparierten Teilchen immer der selbe Wert F_0 resultiert.

- mathematische Formulierung

$$\boxed{(\Delta F)^2 = \langle (F - \langle F \rangle)^2 \rangle_{\Psi_0} = 0}$$

↳ Mittelwert der Quadrate der Abweichungen vom Erwartungswert muss verschwinden.

↳ scharfer Erwartungswert

$\Rightarrow$ Varianz $(\Delta F)^2 = 0$

↳ unscharfer Erwartungswert

$\Rightarrow$ Varianz $(\Delta F)^2 \neq 0$

• Beispiele:

- scharfe Erwartungswerte:

  - Teilchen im Potentialtopf hat scharf bestimmte Energie

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 n^2$$

im Zustand ψ_n zur Quantenzahl n

$\Rightarrow$ Varianz $\Delta E_n \to 0$

$\Rightarrow$ kompatibel mit Heisenberg'scher Unschärferelation für $\Delta t \to \infty$

$$\Delta E \, \Delta t \sim h$$

  - freies Teilchen mit $\psi = A\, e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}$

$\Rightarrow$ E, p scharf bestimmt

$\Rightarrow$ x unscharf, da $\psi^* \psi = \text{const.}$

- Unscharfe Erwartungswerte

  - Gauss'sches Wellenpaket
  - Ort und Impuls eines Teilchens am Doppelspalt

- Damit eine Observable F den scharfen Wert F_0 hat muss die Wellenfunktion ψ_0 die Eigenwertgleichung

$$\boxed{\hat{F}\psi_0 = F_0\psi_0}$$

erfüllen.

Dann ist ψ_0 eine Eigenfunktion des Operators $\hat{F}$ zum Eigenwert F_0.

⇒ Beweis durch Berechnung der Varianz

$$(\Delta F)^2_{\psi_0} \overset{!}{=} 0$$

⇒ Wenn bei wiederholter Messung der Observablen F an einem im Zustand ψ_0 präparierten Teilchen der Wert F_0 gemessen wird so ist ψ_0 ein Eigenzustand des Operators $\hat{F}$ zum Eigenwert F_0.

3. Postulat: Das Ergebnis einer einzelnen Messung einer Observablen F ist ein Eigenwert des zugehörigen Operators $\hat{F}$.

Beispiel: Teilchen im Potentialtopf. Was wird gemessen wenn
$\psi = (\psi_1 + \psi_2)\frac{1}{\sqrt{2}}$?