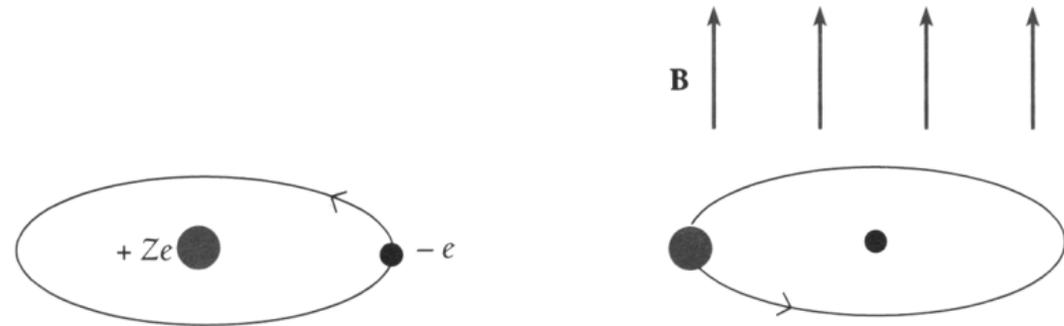


11. Spin-Bahn-Kopplung

- Die Wechselwirkung des magnetischen Moments μ des Elektrons mit seinem Bahn-Drehimpuls l wird Spin-Bahn-Kopplung genannt.
- Dieser Effekt führt zu einer Feinstruktur, d.h. einer Aufspaltung von Spektrallinien in mehrere Sub-Linien, im einfachsten Fall in eine Doppel-Linie, wie z.B. bei der Natrium D-Linie.

klassisches Modell:

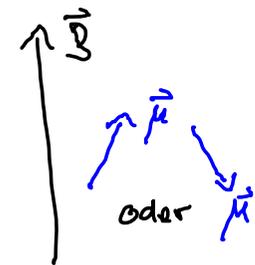
- betrachte die Bahnbewegung eines Elektrons um einen Atomkern mit Ladung $+Ze$
- Im rotierenden Bezugssystem des Elektrons erzeugt die Bahnbewegung des positiv geladenen Kerns ein Magnetfeld \mathbf{B} .



- Das magnetische Moment des Elektron-Spins μ wechselwirkt mit dem durch die Bahnbewegung des Elektrons hervorgerufenen Magnetfeld \mathbf{B} . In diesem Feld hat das Elektron die zusätzliche potentielle Energie U_m .

$$U_m = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B} = -\mu_z B_z$$

$$= -g_s \mu_B \hat{S}_z B_z = \mp \mu_B B_z$$



- Jeder elektronische Zustand in einem Eielektronen-System mit Bahndrehimpuls spaltet in zwei Zustände mit unterschiedlicher Energie auf.

11.1 Grössenordnung der Spin-Bohn Kopplung in H

- das Feld der Bahnbewegung
- mittlerer Bahnradius
- Umlauffrequenz
- daher ergibt sich für ein Elektron in einem 2p Zustand
- mit dem vereinfachten Energie-Niveau-Diagramm

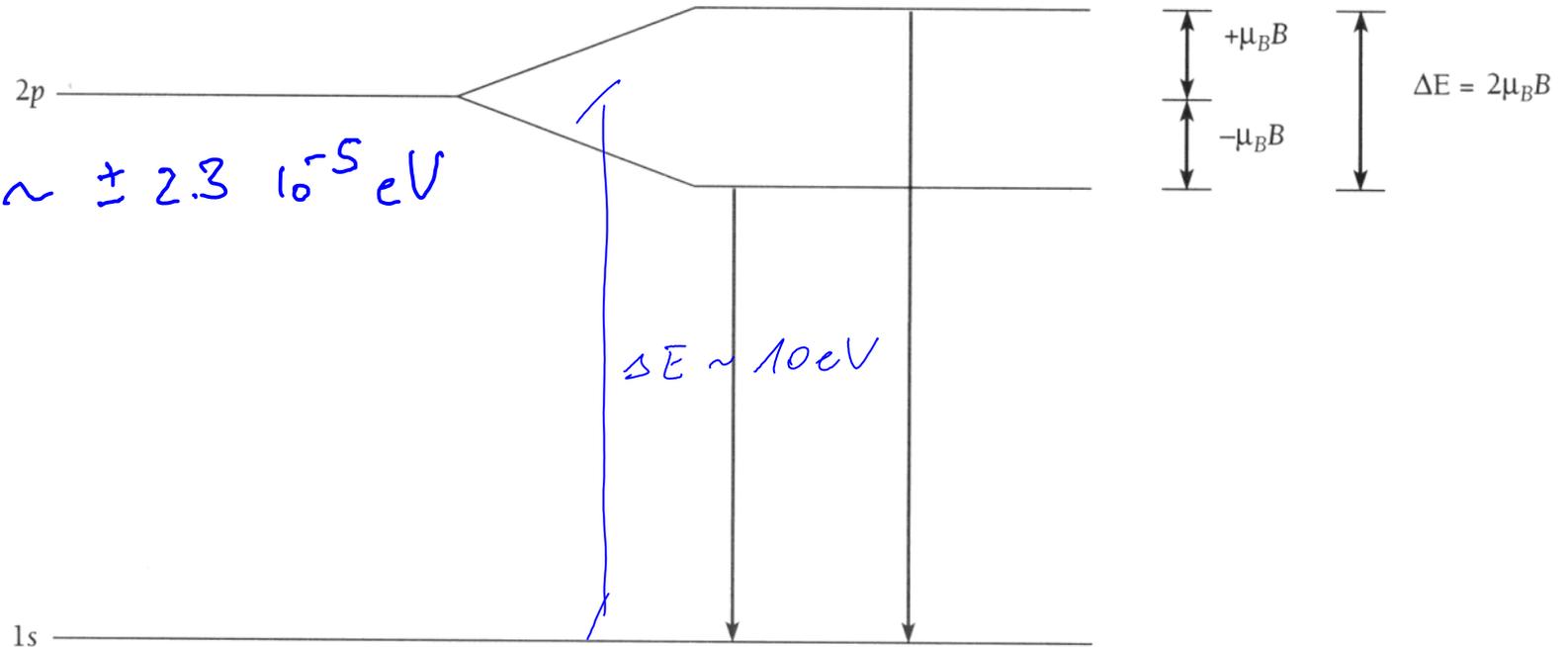
$$B = \frac{\mu_0 I}{2r} = \frac{\mu_0 f e}{2r}$$

$$r = n^2 a_0$$

$$f = \frac{v}{2\pi r} = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m r}} \frac{1}{2\pi r}$$

$$B \sim 0.4 \text{ T}$$

$$U_m = \pm \mu_B B \sim \pm 2.3 \cdot 10^{-5} \text{ eV}$$

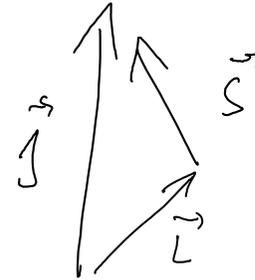


11.2 Gesamtdrehimpuls

- Jedes Elektron in einem Atom trägt seinen Bahn-Drehimpuls L und seinen Spin-Drehimpuls S zum Gesamtdrehimpuls J des Atoms bei.
- wir betrachten den einfachsten Fall von Atomen mit einem einzelnen Elektron in der äussersten Schale, d.h. z.B. ein beliebiges Element der 1. Gruppe (H, Li, Na, K, ...) und Ionen wie z.B. He⁺, Be⁺, Mg⁺, B²⁺, Al²⁺ etc.

- in solchen Atomen ist der Gesamtdrehimpuls gegeben durch

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$



- mit dem Betrag des Gesamtdrehimpuls J und den Quantenzahlen j

$$J = \sqrt{j(j+1)} \hbar$$

$$; j = |l-s|, \dots, l+s = l \pm \frac{1}{2}$$

- und der z-Komponente J_z und den Quantenzahlen m_j

$$J_z = m_j \hbar$$

$$; m_j = -j, -j+1, \dots, j-1, j$$

- Es ist nicht nur der Gesamtdrehimpuls J sondern gleichzeitig auch der Bahndrehimpuls L und der Spin S quantisiert.

$$J = \hbar \sqrt{j(j+1)}$$

$$L = \hbar \sqrt{l(l+1)}$$

$$S = \hbar \sqrt{s(s+1)}$$

11.3 Hamiltonoperator Spin-Bahn Kopplung

- Der Hamiltonoperator zur Beschreibung der Spin-Bahn Wechselwirkung lautet:

$$H = \underbrace{\frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}}_{H_0} + \underbrace{\frac{e^2 \mu_0}{8\pi m^2 \hbar^3} \vec{L} \cdot \vec{S}}_{H_{LS}}$$

- Quantenzahlen für H_0 : $\times) \{n, l, m_l, s, s_z\}$ da $[H_0, L^2] = [H_0, L_z] = [H_0, S^2] =$
oder $\times) \{n, j, m_j, l, s\}$ $[H_0, S_z] = [H_0, J^2] = [H_0, J_z] = 0$

- $[\vec{L} \cdot \vec{S}, J^2], [\vec{L} \cdot \vec{S}, J_z], [\vec{L} \cdot \vec{S}, L^2], [\vec{L} \cdot \vec{S}, S^2]$

- J^2, J_z, L^2, S^2 sind gleichzeitig messbar und j, l, s, m_j 'gute' Quantenzahlen für dieses Problem.
- L_z und S_z sind jedoch unbestimmt!

$$[\vec{L} \cdot \vec{S}, L_z] \neq 0 \quad ; \quad [\vec{L} \cdot \vec{S}, S_z] \neq 0 \quad \text{!}$$

Sakurai:

"You have to be either a fool or a masochist to use the L_z, S_z eigenkets as the base kets for this problem."

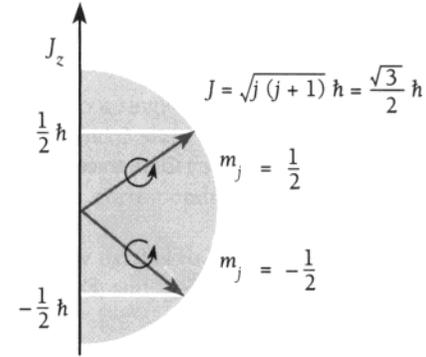
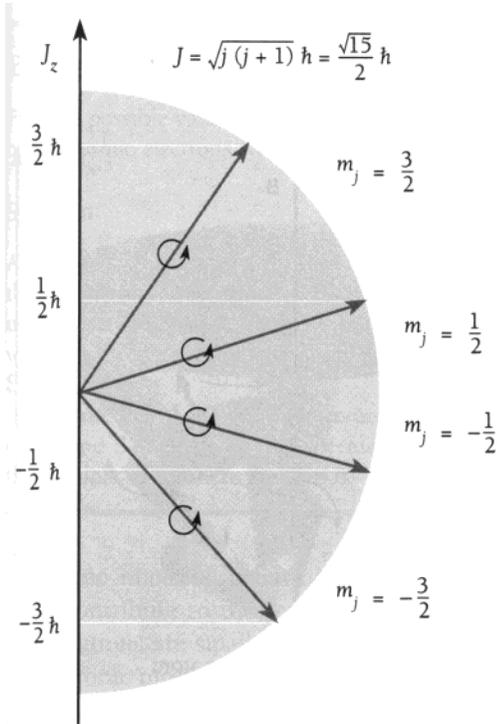
11.4 Relative Ausrichtung von L und S in einem Atom mit einem Elektron

- zwei Möglichkeiten:

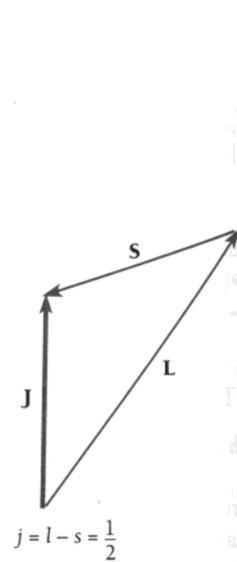
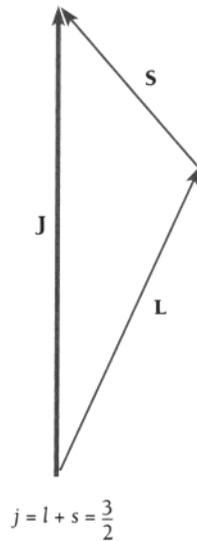
$$j = l + s$$

$$j = l - s$$

Quantisierung:



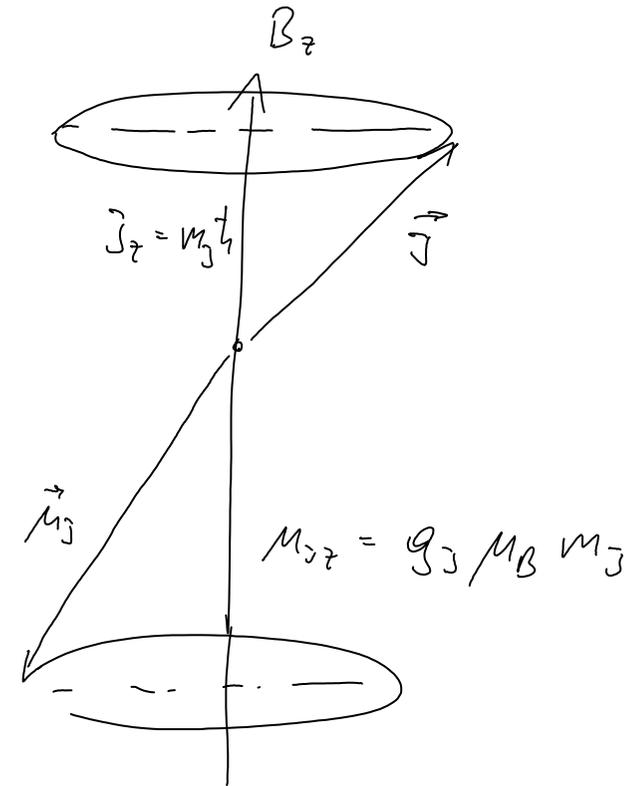
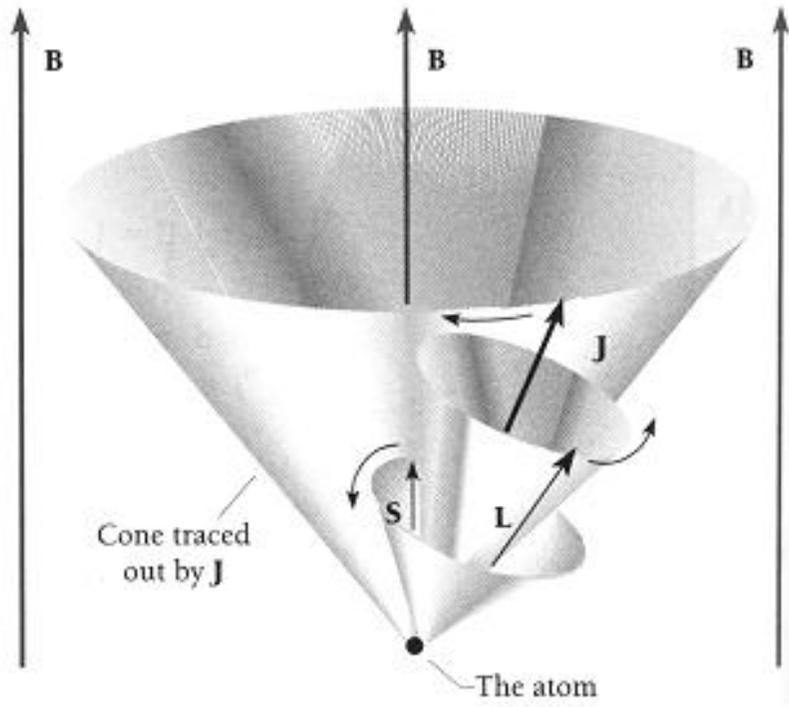
vektoriell:



11.5 Präzession des Gesamtdrehimpulses im Magnetfeld

- \mathbf{J} präzediert um \mathbf{B}
- J_z ist quantisiert
- \mathbf{L} und \mathbf{S} präzedieren um \mathbf{J}
- dieser Eigenschaften bestimmen die Eigenschaften des anomalen Zeeman-Effekts

$$\vec{\mu}_j = \vec{\mu}_e + \vec{\mu}_s \Rightarrow \vec{\mu}_j \nparallel \vec{J}$$



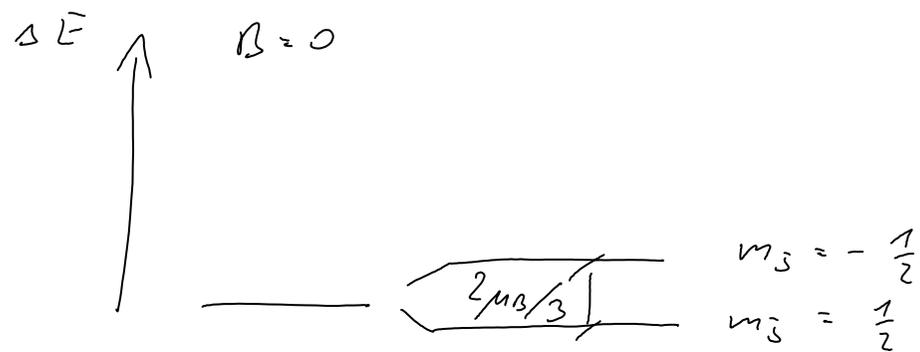
$$g_j = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}$$

... Landéfaktor

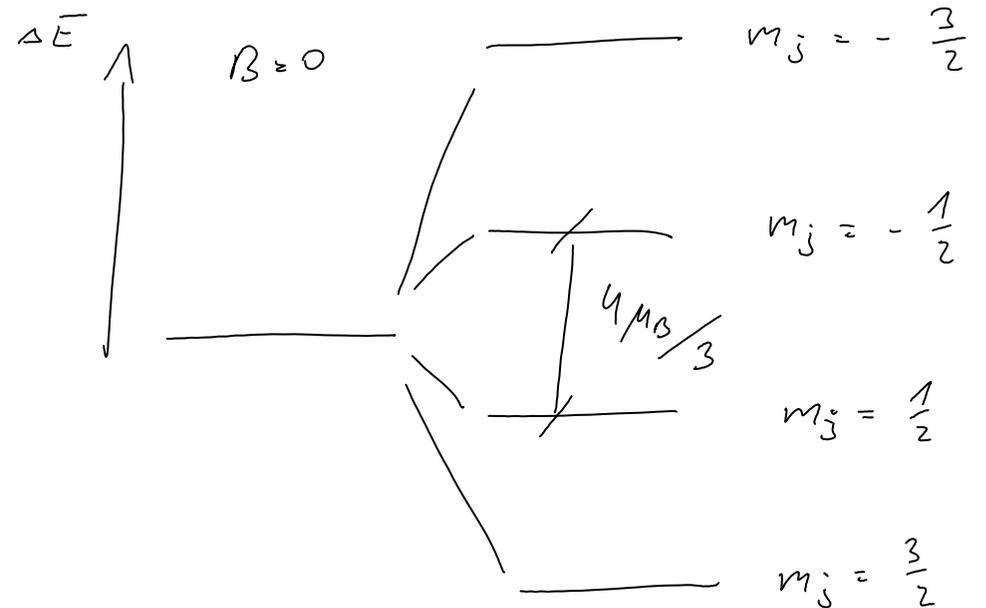
11.5.1 Anomaler Zeeman-Effekt

Energieaufspaltung im Magnetfeld: potentielle Energie: $V_{m_j} = -m_j g_j \mu_B$

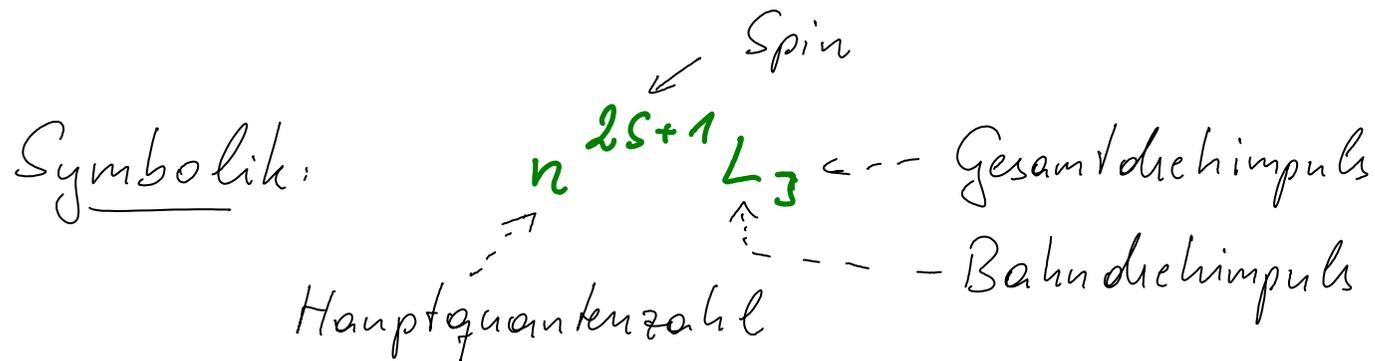
$l=1, s=\frac{1}{2}, j=\frac{1}{2}: g_j = \frac{2}{3}$



$l=1, s=\frac{1}{2}, j=\frac{3}{2}: g_j = \frac{4}{3}$



11.6 Feinstrukturaufspaltung des Wasserstoffatoms



\Rightarrow mögliche Zustände ($n=2$): $2^2 S_{\frac{1}{2}}$, $2^2 P_{\frac{1}{2}}$, $2^2 P_{\frac{3}{2}}$
 $(l=0, s=\frac{1}{2})$ $(l=1, s=\frac{1}{2})$ $(l=1, s=\frac{1}{2})$

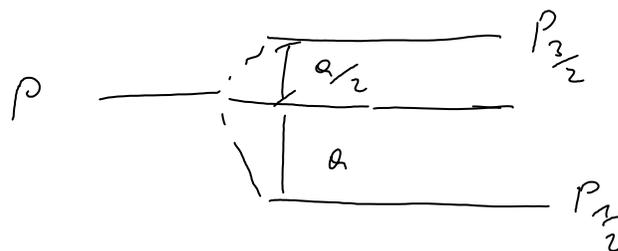
$$V_{LS} = \frac{a}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]$$

Spin-Bahn-Kopplungskonstante: $a = \frac{ze^2 \mu_0 \hbar^2}{8\pi m_0^2 r^3} \propto \frac{z^4}{n^6}$

$2^2 S_{\frac{1}{2}}$: $V_{LS} = 0$... da kein Magnetfeld für s-Zustände

$2^2 P_{\frac{1}{2}}$: $V_{LS} = -a$

$2^2 P_{\frac{3}{2}}$: $V_{LS} = \frac{a}{2}$



11.7 Wasserstoffspektrum

- Auswahlregeln: $\Delta l = \pm 1, \Delta j = \pm 1, 0$

Struktur der $n = 2$ und $n = 3$ Zustände:

- Aufspaltung der H_α Linie in 7 einzelne Linien
- Zustände mit gleichem n und unterschiedlichem j haben unterschiedliche Energien

