Physik IV 2010 - Zusatzaufgaben

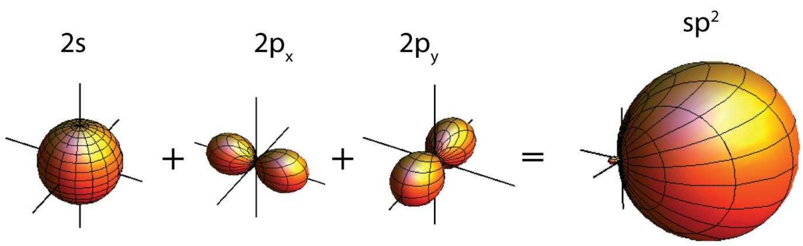
28. Mai 2010

1. **Superposition von Wellenfunktionen des Wasserstoffatoms**
   Jeder elektronische Zustand des Wasserstoffatoms kann durch eine Linearkombination der Basiszustände $\psi_{n,l,m}(r,\theta,\phi) = R_{n,l}(r)Y_{l,m_l}(\theta,\phi)$ beschrieben werden.

   (a) Die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der Zustände $\psi_{n,l,m}$ sind symmetrisch um die z-Achse. Zeigen Sie dies explizit für $\psi_{2,l,m}$. Was können Sie zusätzlich über die Symmetrie des $\psi_{2,0,0}$ Zustandes aussagen?

   (b) Bestimmte Superpositionszustände besitzen eine höhere Elektronendichte in einer Raumrichtung. Damit können Molekülbindungen beschrieben werden, da es dadurch zur Abschirmung der Kernladungen und dadurch zu einer attraktiven Kraft zwischen den an der Bindung beteiligten Atomen kommt. Finden Sie eine (normierte) Linearkombinationen der Zustände $\psi_{2,1,1}$ und $\psi_{2,1,-1}$, die zu einer um die x-Achse symmetrische Wellenfunktion $\psi_{2,1,x}$ führt. Zeigen Sie, dass dieser Zustand kein Eigenzustand des L_z-Operators mehr ist.

   (Anmerkung: Die Kombination der energetisch entarteten Zustände $\psi_{2,0,0} + \psi_{2,1,x} + \psi_{2,1,y}$ wird schliesslich als sp^2-Hybridorbital bezeichnet (siehe Abbildung) und tritt z. B. bei der Bindung von Kohlestoff-Atome in Graphit auf.)



2. **Atomare Übergänge und Zeeman Effekt**
In einem Magnetfeld werden die atomaren Energieniveaus durch den Zeeman-Effekt um
$$\Delta E = \frac{eB}{2m_e} L_z$$
verschoben.

   (a) Optische Dipol-Übergänge zwischen den Energieniveaus sind nur dann erlaubt, wennn die Auswahlregeln $\Delta l = \pm 1$ and $\Delta m_l = 0, \pm 1$ erfüllt sind. Wie lauten die möglichen Übergänge zwischen der $n = 1$ und der $n = 2$ Schale des Wasserstoffatoms?

   (b) Was wird bei einer spektroskopischen Messung dieser Übergänge beobachtet, wenn die Stärke des Magnetfeldes erhöht wird?

   (c) Berechnen Sie die Zeeman-Aufspaltung der Spektrallinien in einem Magnetfeld von

      i. $B = 10$ T.

      ii. $B = 10^{-4}$ T (dem Erdmagnetfeld).

3. **Spin-Präzession im externen Magnetfeld**
Ein ruhendes Elektron befinde sich in einem externen magnetischen Feld in positiver z-Richtung $\vec{B} = (0, 0, B_z)$. Der Hamiltonoperator ist für dieses Problem durch $\hat{H} = -\hat{\vec{\mu}}_s \cdot \vec{B}$ gegeben.

   (a) Berechnen Sie die potentielle Energiedifferenz zwischen den beiden möglichen Spineinstellungen ($|-\frac{1}{2}\rangle$ bzw. $|\frac{1}{2}\rangle$).

   (b) Zeigen Sie durch Lösen der Schrödinger-Gleichung
$$\hat{H}|\pm\frac{1}{2}(t)\rangle = i\hbar\frac{d}{dt}|\pm\frac{1}{2}(t)\rangle,$$
dass die Zeitentwicklung des Zustandes $|\pm\frac{1}{2}\rangle$ durch
$|\pm\frac{1}{2}(t)\rangle = e^{\pm i\omega t}|\pm\frac{1}{2}(0)\rangle$ gegeben ist. Berechnen Sie die Änderungsrate ω.

   (c) Nehmen Sie an, das Elektron wird so präpariert, dass es sich anfangs im Superpositionszustand $\left(|\frac{1}{2}\rangle + |-\frac{1}{2}\rangle\right)/\sqrt{2}$ befindet. Berechnen Sie die oszillierende Komponente des magnetischen Moments in der x-Richtung, d.h. den Erwartungswert von $\hat{S}_x$. Diese Oszillationsfrequenz wird *Larmor-Frequenz* genannt.
Hinweis: Benutzen Sie dazu die Orthogonalitätsrelation $\langle\pm\frac{1}{2}|\mp\frac{1}{2}\rangle = 0$ und drücken Sie $\hat{S}_x$ durch Leiteroperatoren aus, $\hat{S}_x = (\hat{S}_+ + \hat{S}_-)/2$.