Physik IV 2010 - Übung 5

26. März 2010

1. **de Broglie Wellenlänge I** $\sum 3$

   (a) Berechnen Sie unter Verwendung der Relation $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_BT$ die de Broglie Wellenlänge

      i. eines Moleküls bei Raumtemperatur. $[\frac{1}{2}]$

      ii. eines Rb^{87} Atoms in einem Bose-Einstein Kondensat bei einer Temperatur von 50 nK. $[\frac{1}{2}]$

   (b) Was bedeuten die Resultate in (a) in Bezug auf die Grösse der Atome und welche Schlüsse können Sie daraus ziehen? $[\frac{1}{2}]$

   (c) In einem Elektronenmikroskop wird - nomen est omen - ein kollimierter hochenergetischer Elektronenstrahl an Stelle eines Lichtstrahls zur Abbildung von Objekten verwendet. Wie gross ist theoretisch die bestmögliche Auflösung eines Elektronenmikroskops bei einer Elektronenenergie von typischerweise 10 keV? Warum kann diese Auflösung in der Praxis nicht erreicht werden? [1]

   (d) Den derzeitigen Rekord für das grösste Teilchens bei dem Interferenz als typische Welleneigenschaft experimentell gezeigt wurde hält das 'fussball'-förmige Molekül Fluorofullerene ($C_{60}F_{48}$). Berechen Sie die de Broglie Wellenlänge dieses Moleküls bei einer Geschwindigkeit von 100 m/s ($m_u = 1.66 \times 10^{-27}$ kg, $m_C = 12m_u$, $m_F = 19m_u$). Vergleichen Sie mit der Grösse des Moleküls. $[\frac{1}{2}]$

2. **de Broglie Wellenlänge und Wellenlänge von Photonen** $\sum 1\frac{1}{2}$

   Leiten Sie die Beziehung

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{E_{\text{kin}}(E_{\text{kin}} + 2m_0c^2)}}$$

   zwischen der de-Broglie Wellenlänge eines Teilchens mit Masse m und seiner kinetischen Energie E_{kin} her. Zeigen Sie, dass die de-Broglie Wellenlänge des Teilchens der Wellenlänge eines Photons mit der selben Gesamtenergie entspricht, wenn die Gesamtenergie des Teilchens viel grösser als dessen Ruheenergie ist. $[1\frac{1}{2}]$

3. **Doppelspaltexperiment mit Wellen und Teilchen**

Das Doppelspaltexperiment ist eines der Schlüsselexperimente zum Verständnis der Quantenmechanik. $\sum 2\frac{1}{2}$

(a) Ein Elektronenstrahl mit einer kinetischen Energie von 50 keV trifft auf eine Doppelspaltanordnung (siehe Übungsblatt 1 - Aufgabe 2). Betrachten Sie (nur für die folgende Überlegung!) die Elektronen als massive Teilchen und skizzieren Sie die zu erwartende Intensitätsverteilung auf einem Schirm im Abstand von $R = 1$ m vom Doppelspalt. Die Spaltbreite beträgt 0.3 μm und der Spaltabstand 1 μm. Vernachlässigen Sie dabei Teilchenstösse und nehmen Sie absorbierend Wände an. Wo befinden sich die Intensitätsmaxima? [$\frac{1}{2}$]

(b) Tatsächlich wird jedoch eine Intensitätsverteilung wie im photonischen Doppelspaltexperiment (Blatt 1 - Aufgabe 2) beobachtet. Wo befindet sich das Intensitätsmaximum in diesem Fall? Begründen Sie Ihre Antwort. Berechnen Sie ausserdem den Abstand zu den benachbarten Maxima am Beobachtungsschirm. [1]

(c) Berechnen Sie diesen Abstand, wenn Licht der gleichen Energie anstatt der Elektronen verwendet wird. [$\frac{1}{2}$]

(d) Angenommen, die Intensität des Elektronenstrahls beträgt ca. 10^8 s^{-1}. Wie gross ist der mittlere räumliche Abstand zwischen den Elektronen? Welchen Einfluss hat die Intensität auf das Interferenzmuster? [$\frac{1}{2}$]

4. **Zeitentwicklung eines Wellenpakets** $\sum 3$

Ein freies Teilchen kann approximativ durch ein normiertes Gauss'sches Wellenpaket beschrieben werden:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{i(kx-\omega t)} dk$$

$$g(k) = \left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{1/4} e^{-a^2(k-k_0)^2/4}$$

(a) Berechnen Sie $\Psi(x,0)$ und $|\Psi(x,0)|^2$.
Hinweis: Vervollständigen Sie das Quadrat im Exponenten und verwenden Sie das Standardintegral [1]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2(\zeta+\beta)^2} d\zeta = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}$$

(mit komplexen Zahlen α und β).

(b) Die Breite der Gaussfunktion is definiert als der Punkt, an dem die Amplitude auf $1/\sqrt{e}$ abgefallen ist. Wie gross ist die Breite Δx und Δk von $\Psi(x,0)$ bzw. $g(k)$? Wie gross ist $\Delta x \Delta k$? [$\frac{1}{2}$]

(c) Die zeitabhängige Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ hat die folgende Form:

$$\Psi(x,t) = C \exp[ik_0 x] \exp\left[\frac{-(x - \hbar k_0 t/m)^2}{a^2 + 2i\hbar t/m}\right].$$

Geben Sie damit eine Formel für $\Delta x(t)$ und $\Delta k(t)$ an und skizzieren Sie das Produkt $\Delta x \Delta k$ als Funktion der Zeit t. Diskutieren Sie den Zusammenhang mit der Heisenberg'schen Unschärferelation. [$1\frac{1}{2}$]