Physik IV 2010 - Übung 6

1. April 2010

1. **Spektren wasserstoffähnlicher Atome.** $\sum 1\frac{1}{2}$
   Wenn sowohl Kern- als auch Elektronenmasse in die Berechnungen für das Bohrsche Atommodell miteinbezogen werden, muss die Rydberg-Formel leicht abgeändert werden:

$$\frac{hc}{\lambda} \approx \frac{\mu}{m_e} R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right).$$

   $\mu = (m_e m)/(m_e + m)$ ist hier die reduzierte Elektronenmasse, m_e und m die Masse des Elektrons bzw. des Kerns und die Rydberg-Energie $R = R_\infty hc = 2.18 \times 10^{-18}$ J.

   (a) In der Balmer-Serie des Wasserstoffatoms können zwei Linien mit einer Wellenlänge von $\lambda = 656.29$ nm bzw. $\lambda = 656.47$ nm beobachtet werden. Berechnen Sie die zugehörigen Übergänge im Wasserstoffspektrum. Welche Linien erwarten Sie für Wasserstoff und woher kommt die zweite Linie? Diese Erkenntnis führte 1934 zum Nobelpreis für Chemie. [1]

   (b) Nehmen Sie an, dass die Elektronen auf den inneren Schalen nur insofern berücksichtigt werden müssen, dass sie die Ladung des Kerns neutralisieren. Benennen Sie die Rydberg-Serie mit der höchsten Energie für Mg^+-Ionen. Wie gross ist die längste Wellenlänge eines Überganges dieser Serie? [$\frac{1}{2}$]

2. **Diskrete Energieniveaus aus dem Korrespondenzprinzip** $\sum 2\frac{1}{2}$
   Das Korrespondenzprinzip besagt, dass im Grenzfall grosser Quantenzahlen ein Quantensystem durch das korresponierende klassische Modell beschrieben werden kann. Bohr formulierte dieses Prinzip zur Berechnung der diskreten Energieniveaus des Wasserstoffatoms.

   (a) Zeigen Sie, dass die (Kreis-)frequenz $\omega = \Delta E/\hbar$ der beim Übergang eines Elektrons von einer (klassischen) Bahn mit Radius r zu einer benachbarten Bahn mit Radius r' durch

$$\omega_{qm} \sim \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2\hbar}\frac{\Delta r}{r^2}$$

gegeben ist, wobei $\Delta r = r - r' \ll r$ gilt. [1]

(b) Zeigen Sie, dass bei klassischer Betrachtungsweise, die Frequenz der abgestrahlten Energie eines Elektron auf einer Bahn mit Radius r durch folgende Formel gegeben ist:

$$\omega_{class}^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{m_e r^3}.$$

Berechnen Sie Δr durch Gleichsetzen von ω_{class} und ω_{qm}. [$\frac{1}{2}$]

(c) Aus (b) folgt die Relation $\Delta r = 2(a_0 r)^{1/2}$, woraus die Diskretisierung der Bahnradien und als Konsequenz die Diskretisierung der Energieniveaus abgeleitet werden kann. Diese Gleichung kann nämlich gelöst werden, wenn r als Funktion von n zur x-ten Potenz angesetzt wird, d.h. $r = cn^x$, wobei n eine ganze Zahl ist. Berechnen Sie x und c. [1]

3. **Bohr Modell für Exzitonen** $\sum 1$

Gebundene Elektron-Loch Paare in Halbleitern (Exzitonen) können näherungsweise durch das Bohrsche Atommodell beschrieben werden.

Berechnen Sie den Bohr'schen Exzitonenradius und die Bindungsenergie in Germanium. Verwenden Sie hierzu die reduzierte Masse μ^* der effektiven Massen der Elektronen und Löcher $m_e^* \sim 0.082 m_e$ and $m_h^* \sim 0.043 m_e$. Beachten Sie ausserdem, dass die Dielektrizitätskonstante des Vakuums durch die Dielektrizitätskonstante des Halbleitermaterials $\epsilon_r = 15.8$ modifiziert werden muss. [1]

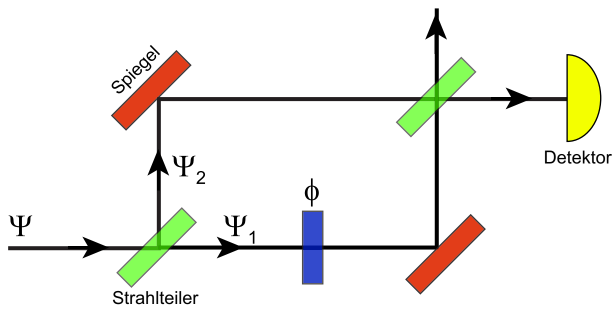
4. **Heisenberg'sche Unschärferelation** $\sum 3$

(a) Natrium Atome $^{23}_{11}\mathrm{Na}$ sollen durch Streuung von Licht detektiert werden. Welche Energie müssen die einfallenden Photonen haben, um die Teilchen auf 100 nm genau zu lokalisieren? Wie gross ist in etwa die Temperatur nach dieser Messung? [1]

(b) Zeigen Sie unter Benutzung der Heisenbergschen Unschärferelation, dass die Grundzustandsenergie eines harmonischen Oszillators durch $E_0 = h\nu/2$ gegeben ist. [1]

(c) Der Natrium D_2-Übergang vom angeregten Zustand ($3^2P_{3/2}$) zum Grundzustand ($3^2S_{1/2}$) mit der Energiedifferenz 2.105 eV hat eine Lebensdauer von $\tau = 16$ ns. Berechnen Sie die (i) absolute und (ii) relative Frequenzunschärfe der emittierten Photonen. Warum sind die üblicherweise beobachteten Linienbreite viel breiter als diese natürliche Liniebreite? [1]

5. Materiewellen-Interferometrie $\sum 2$



In Analogie zur Lichtoptik können auch für Materiewellen (Elektronen, Neutronen, Atome) Interferometer konstruiert werden. Ein sogenanntes Mach-Zehnder Interferometer ist in der obigen Abbildung angedeutet. Teilchen können nun auf zwei gleich wahrscheinlichen Wegen zum Detektor zu gelangen. Durch das Einfügen eines Phasenschiebers in einen Pfad des Interferometers wird die Weglänge und dadurch die Phase der Wellenfunktion um $\phi = k\Delta = 2\pi\Delta/\lambda$ geändert, wobei λ die Wellenlänge des Teilchens und Δ proportional zur Dicke des Phasenschiebers ist.

(a) Berechnen Sie die Detektionswahrscheinlichkeit eines Teilchen in Abhängigkeit von Δ. Für welches ϕ ist die Wahrscheinlichkeit null und wohin fliegen die Teilchen in diesem Fall? [$1\frac{1}{2}$]

(b) Nehmen Sie an, der einfallende Teilchenstrahl habe eine Impulsverteilung δk. Was beobachten Sie für $\delta k \gg 2\pi/\Delta$? [$\frac{1}{2}$]