# Physik IV 2010 - Übung 7

23. April 2010

1. **Emission und Absorption von Strahlung** In einem Behälter mit Temperatur $T$ befindet sich ein Ensemble von $N$ Atomen. Nehmen Sie an, dass nur zwei Energieniveaus mit einer Übergangsfrequenz von 10 GHz für die folgende Rechnung relevant sind. $\sum 3\frac{1}{2}$

   (a) Wie gross ist der Anteil der Atome im höherliegenden Energieniveau bei Raumtemperatur? $[\frac{1}{2}]$

   (b) Geben Sie die drei (Differential-)gleichungen zur Berechnung der Zeitabhängigkeit der Besetzungszahl des Grundzustands $N_0(t)$ bzw. des angeregten Zustandes $N_1(t)$ an. Ihre Antwort sollte die Einstein-Koeffizienten $A$ und $B$ sowie die spektrale Energiedichte der Strahlung $u(\nu)$ beinhalten. [1]

   (c) Zum Zeitpunkt $t = 0$ und bei einer Temperatur von $T = 0$ K befinde sich das Ensemble komplett im angeregten Zustand. Überlegen Sie, welchen Wert die spektrale Energiedichte $u(\nu)$ bei dieser Temperatur hat und berechnen Sie die Besetzungszahl des angeregten Zustands $N_1(t)$ zum Zeitpunkt $t$. [1]

   (d) Zeigen Sie, dass für $T \neq 0$ K die Energiedichte der Strahlung dem Planck'schen Strahlungsgesetz folgt, [1]

$$u(\nu) = \frac{A}{B}\frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}.$$

2. **Ionisationsenergie** $\sum 2$

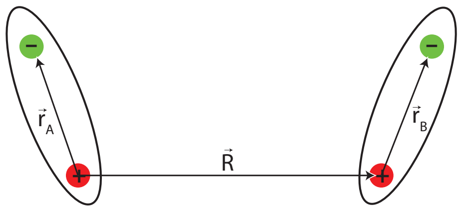
   Die Ionisationsenergie ist die Arbeit, die verrichtet werden muss, um ein Elektron eines Atoms im Grundzustand zu entfernen. Für das freie Wasserstoffatom beträgt diese Energie $-13.6$ eV.

   (a) Das Anlegen eines elektrischen Feldes verändert die potentielle Energie um einen zusätzlichen Term $V_{stark} = Fz$ und führt zu einem Sattelpunkt des Potentials. Berechnen Sie Änderung der Ionisationsenergie eines Wasserstoffatoms, wenn ein Feld von $F = 40$ kV/m entlang der $z$-Achse angelegt wird. Nehmen Sie dabei an, dass die

Grundzustandsenergie unverändert bleibt und vernachlässigen Sie Tunnelprozesse. [$1\frac{1}{2}$]

(b) Wie skaliert das zur Ionisierung eines Atoms in einem angeregten Zustand benötigte elektrische Feld mit der Hauptquantenzahl $n$? [$\frac{1}{2}$]

3. **Dipol-Dipol Wechselwirkung** $\sum 1\frac{1}{2}$




Aufgrund der grossen Bahnradien der Elektronen um den Kern eines Rydberg-Atoms erwarten wir grosse Dipolmomente für hochangeregte Zustände. Dies führt zu einer starken Kopplung zweier Rydberg-Atome, die eventuell zur Quanteninformationsverarbeitung verwendet werden kann.

(a) Geben Sie eine Formel zur quantenmechanischen Berechnung des Dipolmoment eines Rydberg-Atoms in einem Zustand mit Wellenfunktion $\psi_n$ ($n\ldots$ Hauptquantenzahl) an. [$\frac{1}{2}$]

(b) Wie skaliert der Erwartungswert der Dipol-Dipol Wechselwirkungsenergie $V_{dd}(R)$ mit der Hauptquantenzahl $n$? Die Dipol-Dipol Wechselwirkung ist durch

$$V_{dd} \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\vec{r}_A \cdot \vec{r}_B}{|\vec{R}|^3} - \frac{3(\vec{r}_A \cdot \vec{R})(\vec{r}_B \cdot \vec{R})}{|\vec{R}^5|}\right)$$

gegeben. Der Erwartungswert des Bahnradius $r_n$ kann – für diese Abschätzung – aus dem klassischen Bohr-Model entnommen werden. [1]

4. **Erwartungswerte** $\sum 1$

Ein Teilchen befinde sich in einem eindimensionalen Potentialtopf,

$$\begin{cases} V(x) = 0 & 0 < x < L \\ V(x) = \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird eine Potentialbarriere von unendlicher Höhe und endlicher sehr kleiner Breite plötzlich an die Position $X = L/3$ gesetzt. Damit wird das Potential in zwei unabhängige Potentialtöpfe geteilt.

(a) Für $t < 0$ befindet sich das Teilchen im dritten angeregten Zustand ($n = 3$). Wie lautet die Wellenfunktion $\Psi_3(x)$ des Teilchens unmittelbar bevor die Potentialbarriere eingesetzt wird? Skizzieren Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte. $[\frac{1}{2}]$

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit das Teilchen zu einem Zeitpunkt $t > 0$ auf der linken bzw. rechten Seite der Potentialbarriere zu finden. $[\frac{1}{2}]$

5. **Wellenfunktion als Wahrscheinlichkeitsverteilung** $\sum 2$

Ein Teilchen besitze im Ortsraum die Wellenfunktion ($a < 0$)

$$u(x) = \begin{cases} Axe^{-ax} & \text{für} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x < 0. \end{cases}$$

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Messung des Impulses ein Wert zwischen $-\hbar a$ und $\hbar a$ gefunden wird? [2]

Hinweis: Benutzen Sie dabei die Formeln

$$\int (\xi^2 + \alpha^2)^{-2} d\xi = \frac{\xi}{2\alpha^2(\xi^2 + \alpha^2)} + \frac{1}{2\alpha^3} \arctan \frac{\xi}{\alpha} + C$$

und

$$\int_0^{+\infty} d\xi \xi^n e^{-\xi} = n!$$