Physik IV 2010 - Übung 8

27. April 2010

1. **Messprozess und nicht-kommutierende Observablen** $\sum 2$
   Die Observable A besitzt die Eigenfunktionen ψ_1 und ψ_2 mit den Eigenwerten a_1 und a_2. Eine weitere Observable B besitzt die Eigenfunktionen ϕ_1 und ϕ_2 mit Eigenwerten b_1 und b_2, die mit den Eigenfunktionen von A im folgenden Zusammenhang stehen:

   $$\phi_1 = (\psi_1 + 2\psi_2)/\sqrt{5} \quad \phi_2 = (2\psi_1 - \psi_2)/\sqrt{5}.$$

   Bei einer Messung von B wird der Wert b_1 gemessen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei einer darauffolgenden Messung von A die Werte a_1 bzw. a_2 zu erhalten? B wird daraufhin nochmals gemessen, wie hoch ist diesmal die Wahrscheinlichkeit den Wert b_1 zu finden?

2. **Schrödingergleichung** Teilchen mit Masse m befinden sich in einem Potentialtopf mit Seitenlänge a in $x-$ und $y-$Richtung und Seitenlänge b in Richtung z. Das Wandpotential ist durch $\sum 3$

   $$\begin{array}{ll} V(x,y,z) = 0 & 0 < x < a,\ 0 < y < a,\ 0 < z < b \\ V(x,y,z) = \infty & \text{sonst,} \end{array}$$

   gegeben.

   (a) Leiten Sie die Form der normierten Wellenfunktion der Energieeigenzustände in diesem Potential mit Hilfe der zeitunabhängigen Schrödingergleichung her. Verwenden Sie die Quantenzahlen n, p, q zur Benennung der verschiedenen möglichen Zustände entlang der $x-$, $y-$ und $z-$Achse. [$1\frac{1}{2}$]

   (b) Zeigen Sie, dass die Energie der Eigenzustände durch

   $$E(n,p,q) = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{n^2+p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}\right)$$

   gegeben ist. [$\frac{1}{2}$]

(c) Nehmen Sie an, alle Teilchen seien Elektronen, und die Seitenlänge $a = 10b$. Die Elektronen werden – beginnend mit dem Grundzustand – in Zustände mit ansteigender Energie in die Potentialtopf gefüllt. *Schätzen* Sie ab, wieviele Elektronen in den Potentialtopf gefüllt werden können, sodass sich noch alle im Grundzustand bezüglich der $z-$ Richtung ($q = 1$) befinden. [1]

3. **Superpositionsprinzip** $\sum 2$

Zur Präparation des Zustands eines Teilchens in einem harmonischen Oszillatorpotential mit der fundamentalen Frequenz ω steht maximal ein Energiequant zur Verfügung, d.h. $\hbar\omega$. Ein Teilchen in einem harmonischen Oszillatorpotential soll nun so präpariert werden, dass seine Aufenthaltswahrscheinlichkeit für $x > 0$ maximal wird. Berechnen Sie den Zustand für den die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Bereich $x > 0$ maximal wird?

Der Grundzustand des harmonischen Oszillators ist durch die (gerade) Funktion

$$u_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

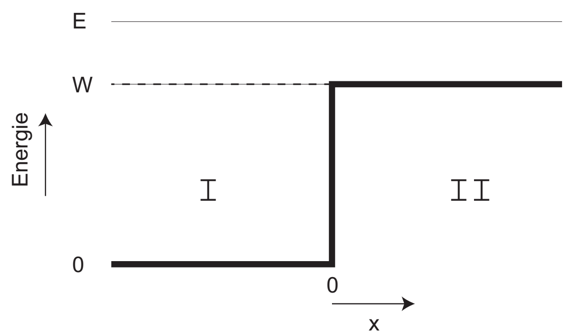
gegeben und der erste angeregte Zustand durch die (ungerade) Funktion

$$u_1(x) = \sqrt{2}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}.$$

[$1\frac{1}{2}$]

4. **Potentialstufe**

Ein Teilchenstrom aus Protonen mit kinetischer Energie E trifft von links auf eine Potentialbarriere der Höhe V_0 (siehe Abbildung). $\sum 3$



(a) Geben Sie einen Ausdruck für den Anteil der reflektierten Teilchen in Abhängigkeit von E und V_0 an. Skizzieren sie den Verlauf dieser Reflektionswahrscheinlichkeit als Funktion von E/V_0 und erklären Sie. [$1\frac{1}{2}$]

(b) Wie gross ist der Anteil der reflektierten Protonen, wenn deren kinetischen Energie $E = 1$ keV und die Höhe der Potentialbarriere $V_0 = 10$ eV beträgt, und wie gross ist die Geschwindigkeit der Protonen vor und hinter der Potentialbarriere. Was würden Sie klassisch erwarten? . [1]

(c) Wie gross ist die typische Eindringtiefe von Protonen mit Energie $E = 1$ eV in den Bereich II? [$\frac{1}{2}$]