

1. Das Photon

1.1. Wellen- und Teilcheneigenschaften von Licht

Klassische Welleneigenschaften:

Huygens und Young (17.-18. Jh.):

- Licht hat Welleneigenschaften
- Beugung, Interferenz, etc.

Maxwell (1885):

- elektromagnetische Strahlung wird beschrieben durch die Maxwellgleichungen
- elektrische E und magnetische B Felder der Frequenz ω

Erzeugung von Licht:

- beschleunigte Ladungen erzeugen Licht
- Antennen/Sender
- Bremsstrahlung (Röntgenstrahlung)
- Synchrotronstrahlung
- Temperaturstrahlung (schwarze Strahler)

Quantenmechanische

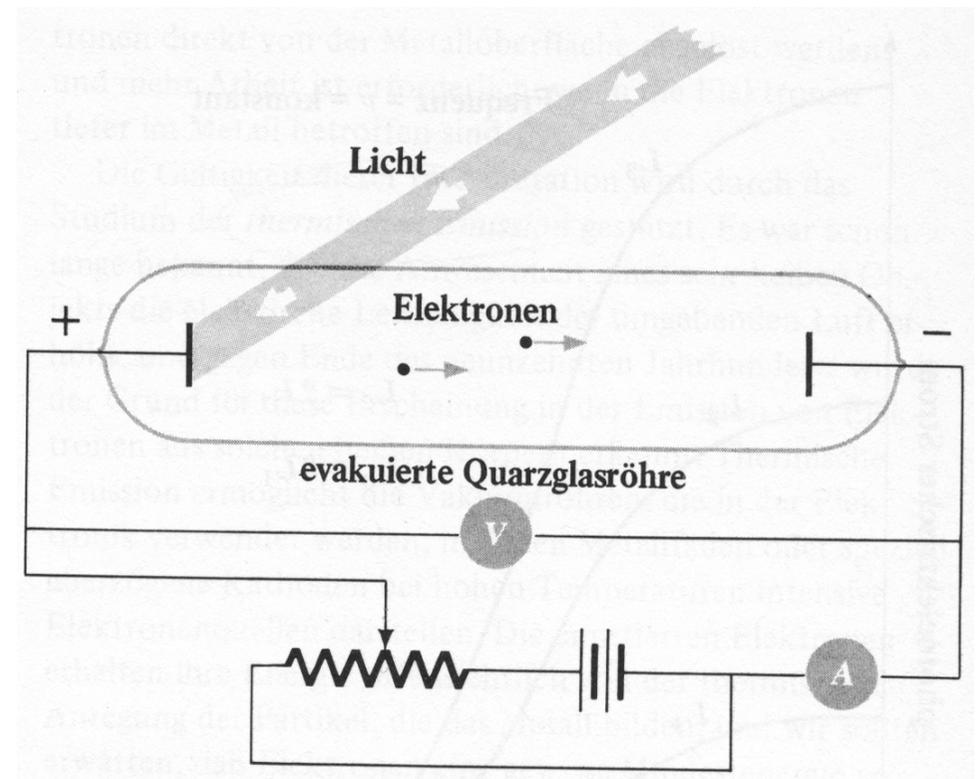
Teilcheneigenschaften des Lichts:

Teilchen/Quant	Photon	
Energie	$E = h \nu$	(Bsp.: Photoeffekt, Temperaturstrahlung)
Ausbreitungsgeschwindigkeit	c	
Masse	$m_0 = 0$	
Impuls	$p = h\nu/c = h/\lambda$	(Bsp.: Compton-Effekt)
Drehimpuls	$h/2\pi$	

1.2 Der Photoeffekt

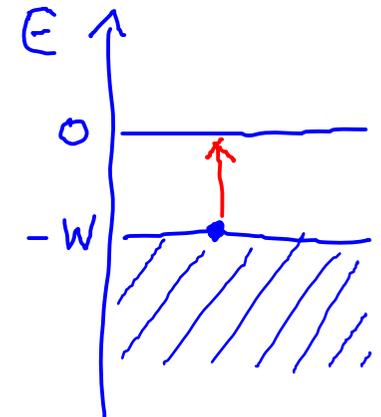
Beobachtung: **Photoelektrische Emission**

- Licht von genügend hoher Frequenz (ultraviolett: $\lambda \sim 1 - 400 \text{ nm}$), das auf eine Alkalimetall Oberfläche fällt, löst Elektronen aus dem Metall heraus.
- Messung (A) des Photostroms I , der zwischen einer Anode (+) und einer Kathode (-) in einer evakuierten Röhre fließt. Durch Anlegen einer Bremsspannung (V) kann der Strom reduziert und vollständig unterdrückt werden.



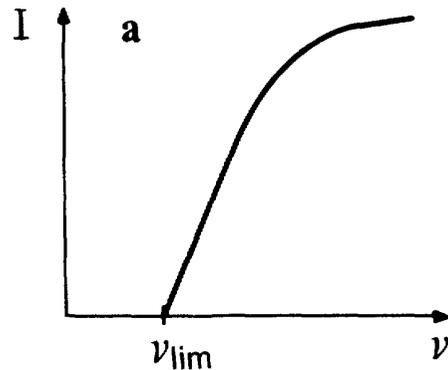
ähnlicher Effekt: **Thermische Emission:**

- Elektronen können auch thermisch aus der Oberfläche eines Metalls durch Heizen auf hohe Temperaturen emittiert werden, z.B. wenn ein hoher Strom Metall durchfließt.
- In diesem Fall wird thermische Energie verwendet, um die Austrittsarbeit W des Metalls zu überwinden. W kann so experimentell bestimmt werden.
- Typische Werte für die Austrittsarbeit eines Metalls: $W(\text{Li}) = 2.46 \text{ eV}$, $W(\text{Na}) = 2.28 \text{ eV}$, $W(\text{K}) = 2.25 \text{ eV}$, $W(\text{Rb}) = 2.13 \text{ eV}$, $W(\text{Cu}) = 4.48 \text{ eV}$, $W(\text{Pt}) = 5.36 \text{ eV}$
- Dieser Prozess kann in Vakuumröhren genutzt werden, um freie Elektronen zu erzeugen (Röhrenfernseher, Elektronenmikroskop, Röntgenröhre, ...).



1.2.1 Messung des Photostroms: Quantitative Untersuchung des Photoeffekts

Abhängigkeit des Photostroms I von der Frequenz ν des eingestrahlten Lichts bei fester Spannung V .

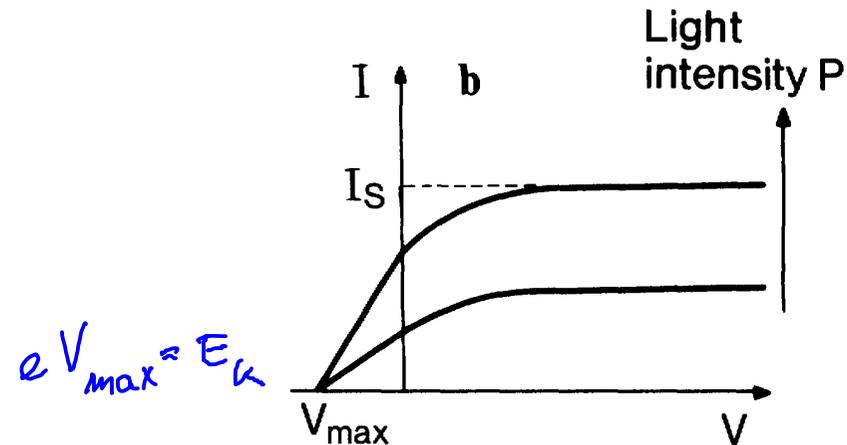


- Kein Strom unterhalb einer materialabhängigen Grenzfrequenz ν_{lim} des eingestrahlten Lichts.

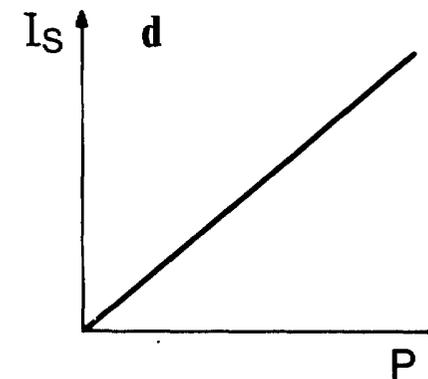
Weitere Beobachtungen:

- Verteilung der Elektronenenergie ist unabhängig von der Intensität P des Lichts.
- Elektronen werden nach wenigen Nanosekunden (10^{-9} s) bei Einstrahlen des Lichts emittiert.

Abhängigkeit des Photostroms I von der Beschleunigungsspannung V für verschiedene Lichtintensitäten P bei fester Frequenz $\nu > \nu_{lim}$:



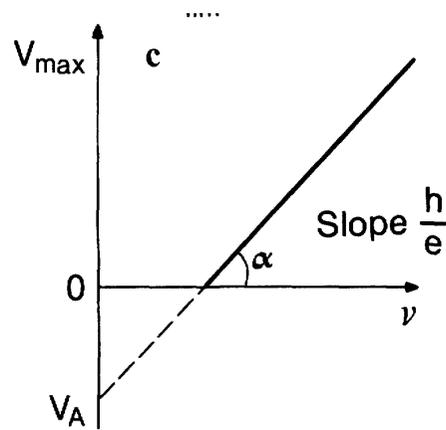
- Kein Strom unterhalb von V_{max} , hängt von der Frequenz des Lichts ab. Sättigung des Stroms I_s für grosse positive Spannungen V .
- Abhängigkeit des Sättigungsstroms I_s von der Lichtintensität P :



- Änderung der Intensität P des Lichts ändert die Zahl der emittierten Elektronen, also auch I_s .

1.2.2 Maximale kinetische Energie E_{kin} der Photoelektronen in Abhängigkeit von der Frequenz ν des eingestrahlten Lichts

$$E_{kin,max} = eV_{max}$$



- es gibt eine materialspezifische Grenzfrequenz ν_{lim} für die Emission von Elektronen
- maximale kinetische Energie der Elektronen hängt linear von der Frequenz ν des Lichts ab
- die Proportionalitätskonstante ist unabhängig vom verwendeten Metall
- Die Proportionalitätskonstante kann bestimmt werden zu $h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$. Dies ist das Planck'sche Wirkungsquantum

Erklärung des Photoeffekts:

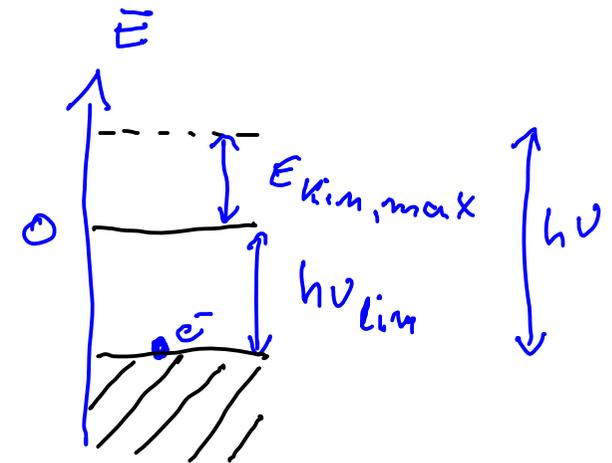
Energie des Photons

$$h\nu = E_{kin,max} + W$$

maximale Energie des Elektrons

Austrittsarbeit W : die zum Austritt eines Elektrons aus der Metalloberfläche benötigte Energie:

$$W = h\nu_{lim}$$

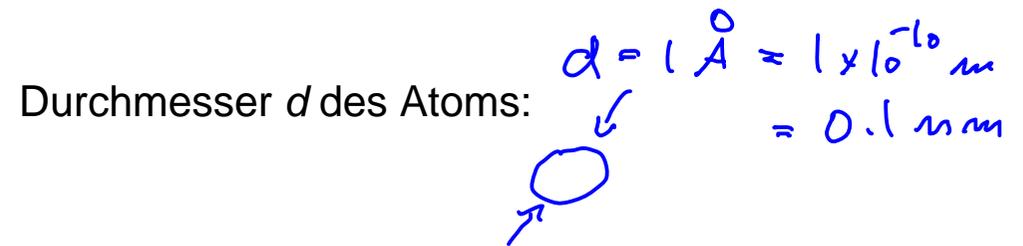
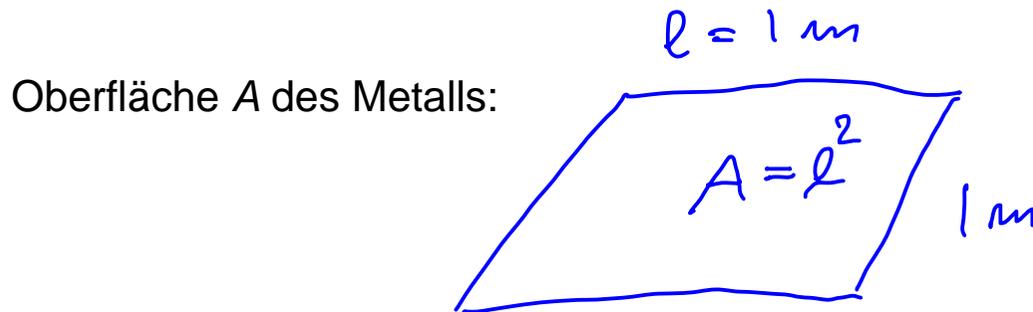


Die Emissionszeit: Versuch einer klassischen Erklärung

Beobachtung: Instantane Emission von Elektronen aus der Oberfläche eines Metalls bei Lichtintensitäten von

$$I = 10^{-6} \text{ W/m}^2$$

Abschätzung des durchschnittlichen Energiegewinns eines Elektrons an der Oberfläche A des Metalls



Anzahl N der Atome in der obersten Gitterebene des Metalls:

$$N \sim A/d^2 = 10^{20}$$

mittlerer Energiegewinn pro Elektron (ein e^- pro Atom) pro Zeiteinheit:

$$\begin{aligned} I/N &\sim 10^{-26} \text{ W} \\ &\approx 10^{-7} \text{ eV/s} \end{aligned}$$

Resultat: Es sollte 10^7 Sekunden dauern bis alle Elektronen im Mittel ausreichend Energie absorbiert haben, um die Austrittsarbeit von 1 eV aus dem Licht zu absorbieren.

$$e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Einsteins Erklärung des Photoelektrischen Effekts (1905):

- Licht besteht aus einzelnen Quanten, die wir Photonen nennen.
- Die Energie eines einzelnen Photons ist gegeben durch $E = h \nu$
- ν ist die Frequenz des Photons, h ist die Planck'sche Konstante

Anwendungen des fotoelektrischen Effekts:

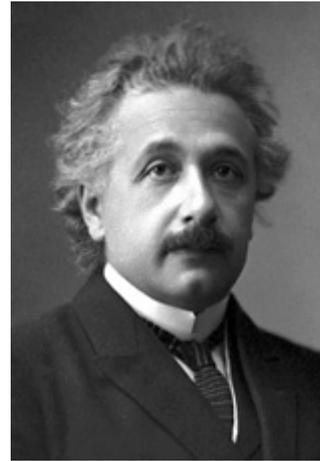
- Fotosensoren
- Detektoren für elektromagnetische Strahlung

Literatur zum Fotoeffekt:

Kaenzig: Abschnitt 1.2

Beiser: Abschnitt 2.3

Haken&Wolf: Abschnitt 5.3



Nobelpreis in Physik (1906)

Albert Einstein

"for his services to Theoretical Physics, and especially for his discovery of the law of the photoelectric effect"

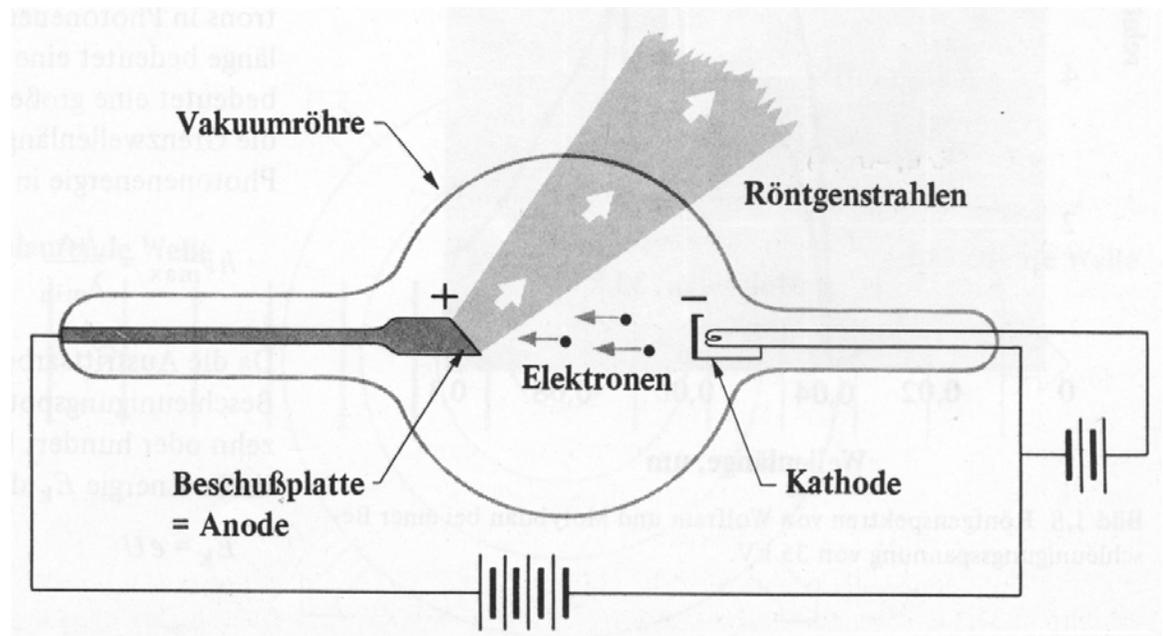
1.3 Röntgenstrahlung und ihre Erzeugung

schematische Darstellung einer Röntgenröhre:

- Erzeugung elektromagnetischer Strahlung durch hochenergetische Elektronen, die auf eine Metalloberfläche auftreffen.
- "Inverser Photoeffekt"

charakteristische Eigenschaften der Röntgenstrahlung:

- Breitet sich geradlinig und unabhängig von elektrischen oder magnetischen Feldern aus.
- Intensität steigt mit einfallendem Elektronenfluss.
- Schnellere Elektronen erzeugen höherenergetische Röntgenstrahlung.
- Röntgenstrahlung ruft Reaktionen in Photosensitiven Materialien hervor.
- Sie kann Fluoreszenz oder Phosphoreszenzstrahlung erzeugen.



Erster Nobelpreis in Physik (1901)

Wilhelm Conrad Röntgen

"in recognition of the extraordinary services he has rendered by the discovery of the remarkable rays subsequently named after him"

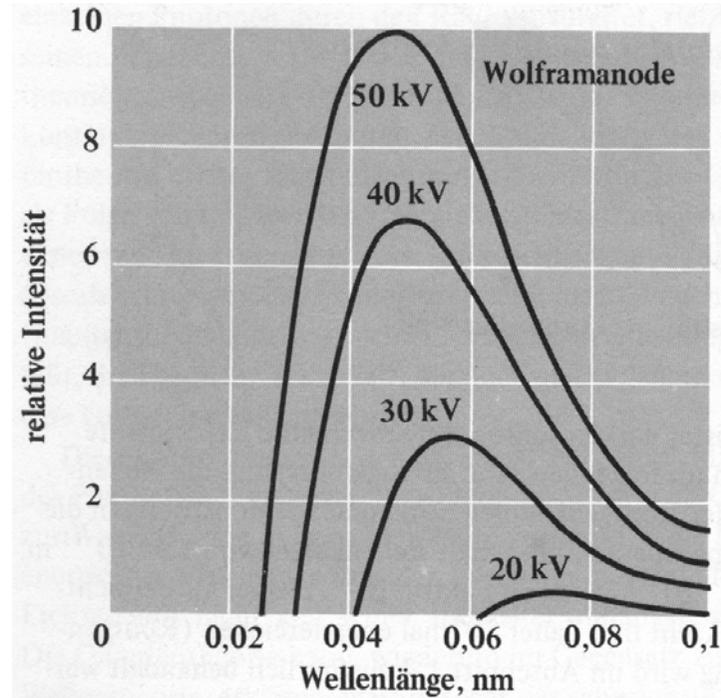


Das allererste Röntgenbild:
Die Hand von Konrad Röntgens Ehefrau.

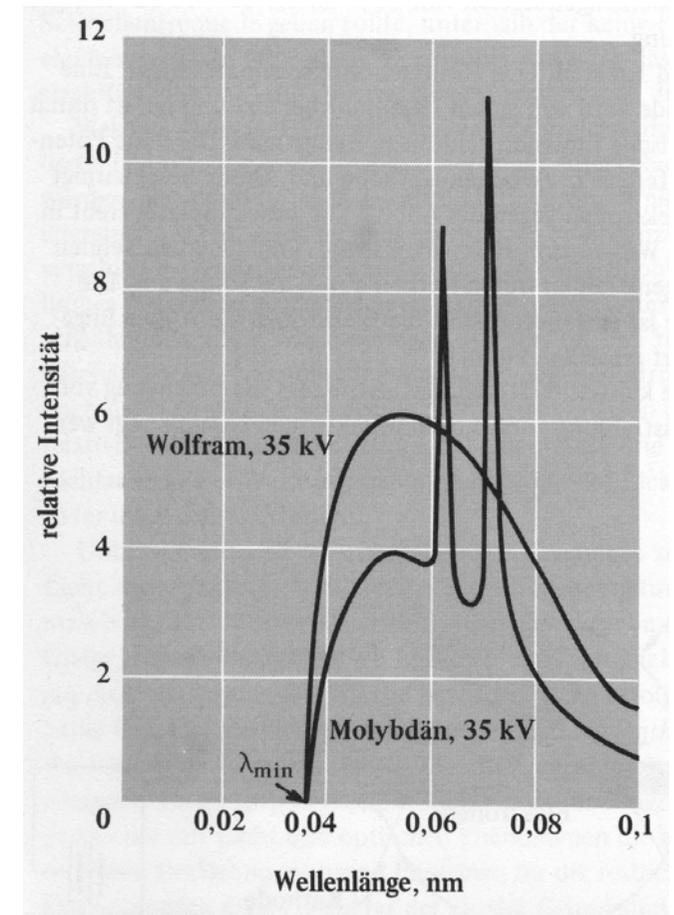
1.3.1 Röntgenspektren

Beobachtungen:

- Bremsstrahlung: Kontinuierliches Spektrum erzeugt durch in Vielfachstreuung abgebremste Elektronen.
- Untere Grenzwellenlänge λ_{min} (obere Grenzfrequenz ν_{max}) bestimmt durch maximale Elektronenergie $E_{kin}^{max} = e U$ bei Beschleunigungsspannung U .
- Grenzfrequenz ist nur abhängig von E_{kin}^{max} und unabhängig vom Material



Wolfram ($_{74}W$)



Molybdän ($_{42}Mo$)

Grenzwellenlänge, -frequenz:

$$E_{kin, max} = eU = h\nu_{max} = \frac{hc}{\lambda_{min}} \Rightarrow \lambda_{min} = \frac{hc}{eU}$$

- Typischer Wellenlängenbereich für Röntgenstrahlung: $\lambda = 10^{-11} - 10^{-8} m = 0.01 - 10 nm$
- Für Material charakteristische Intensitätsmaxima bei $\lambda \sim 1/Z^2$ im Spektrum (siehe Mo). Detaillierte Erklärung folgt.

1.3.2 Röntgenbeugung an Einkristallen

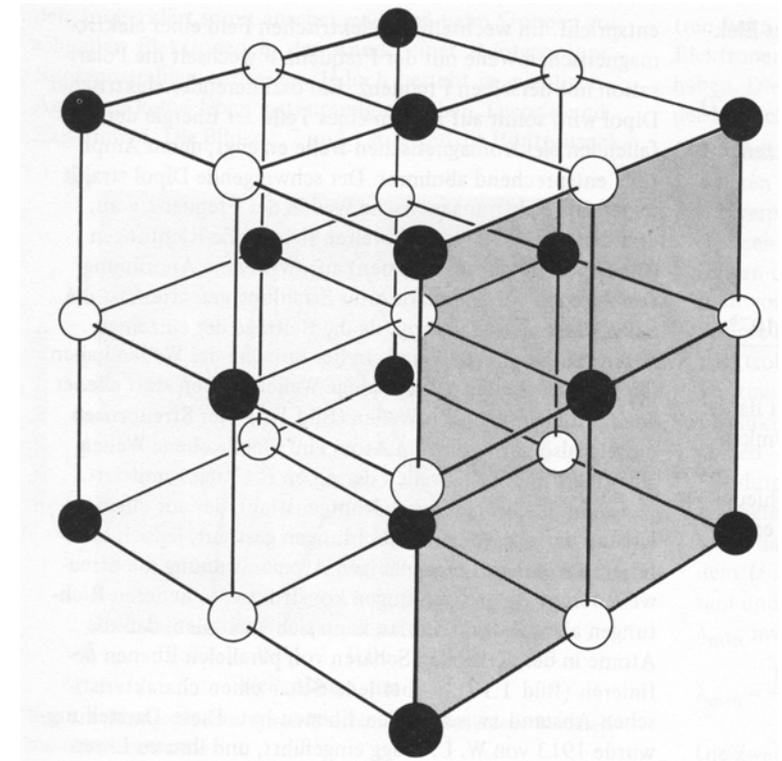
Betrachte Beugung an einfach kubischem Gitter. Atome sind im Kristall auf der Subnanometerskala regelmässig angeordnet.

Technik wird ausgiebig in der Festkörperphysik angewandt. (siehe Lit.: Ibach-Lüth, Kap. 2 & 3)

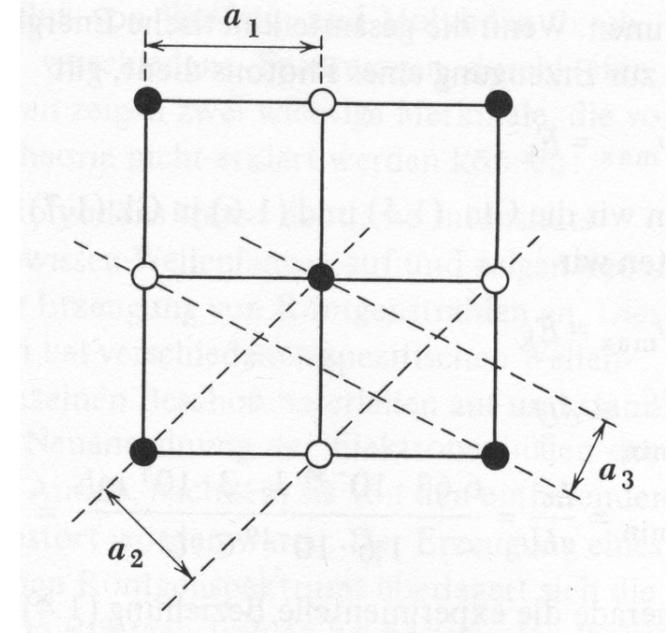
NaCl Einkristall, einfach kubisches Gitter:

Analogie zur Optik:

- Beugung an einem regelmässigen Gitter mit Periode a
- Wellenlänge λ der Strahlung (0.01 nm to 10 nm) muss vergleichbar zur Gitterkonstanten a sein.
- Übung: Beugung am Spalt, Interferenz am Doppelspalt, Interferenz am Gitter

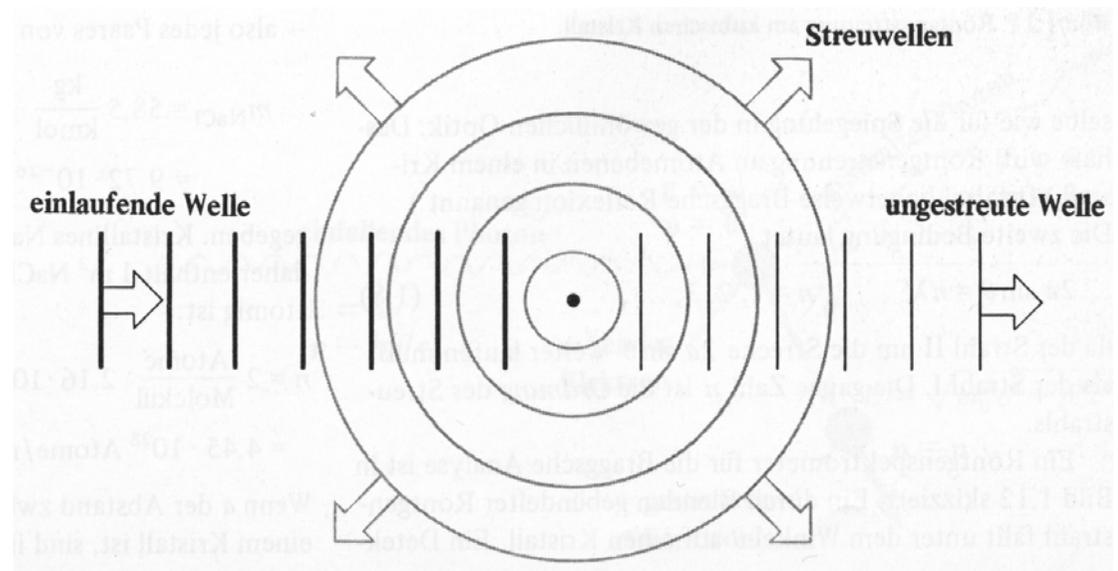


Braggsche Gitterebenen



Prinzip von Huygens:

- Streuung der Röntgenstrahlung von einem Punkt-Objekt (ein einzelnes Atom).
- Gestreute Wellen der Punktquellen interferieren.
- Konstruktive Interferenz tritt nur in bestimmte Richtungen auf.
- Berechne diese Richtungen.

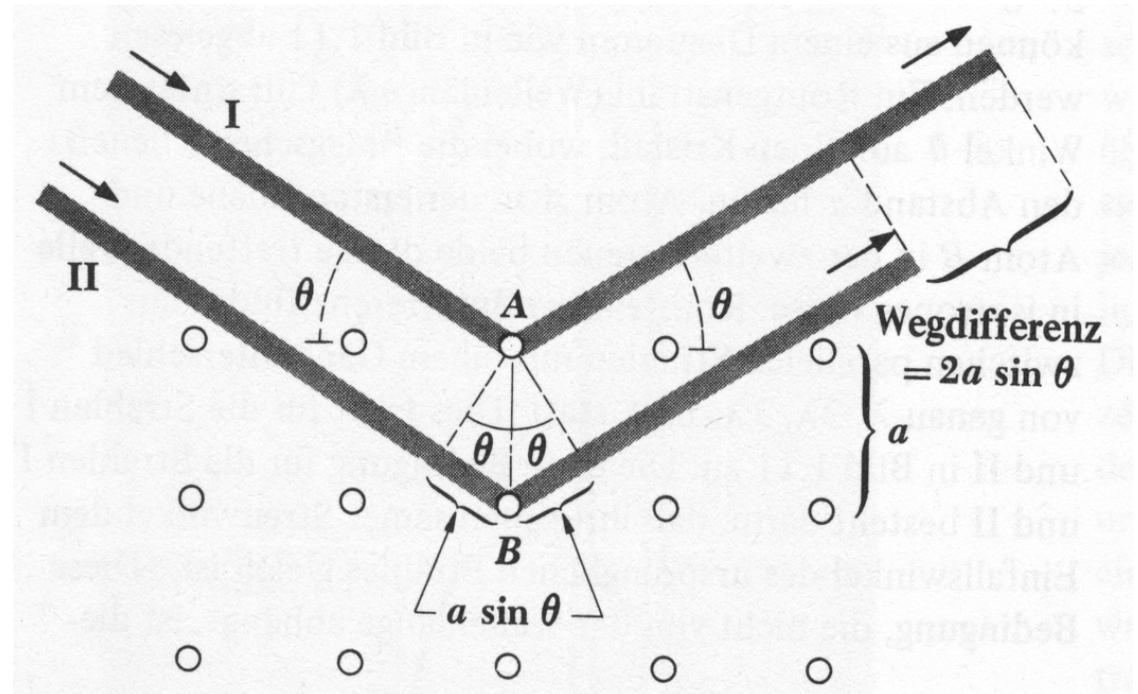


Braggsche Interferenzbedingung

1. Betrachte zwei Strahlen mit dem selben Einfall- und Ausfallwinkel θ .
2. Wegunterschied der beiden Strahlen muss zu konstruktiver Interferenz führen, d.h. ein vielfaches der Wellenlänge der Röntgenstrahlung sein.

$$2a \sin \theta = n \lambda$$

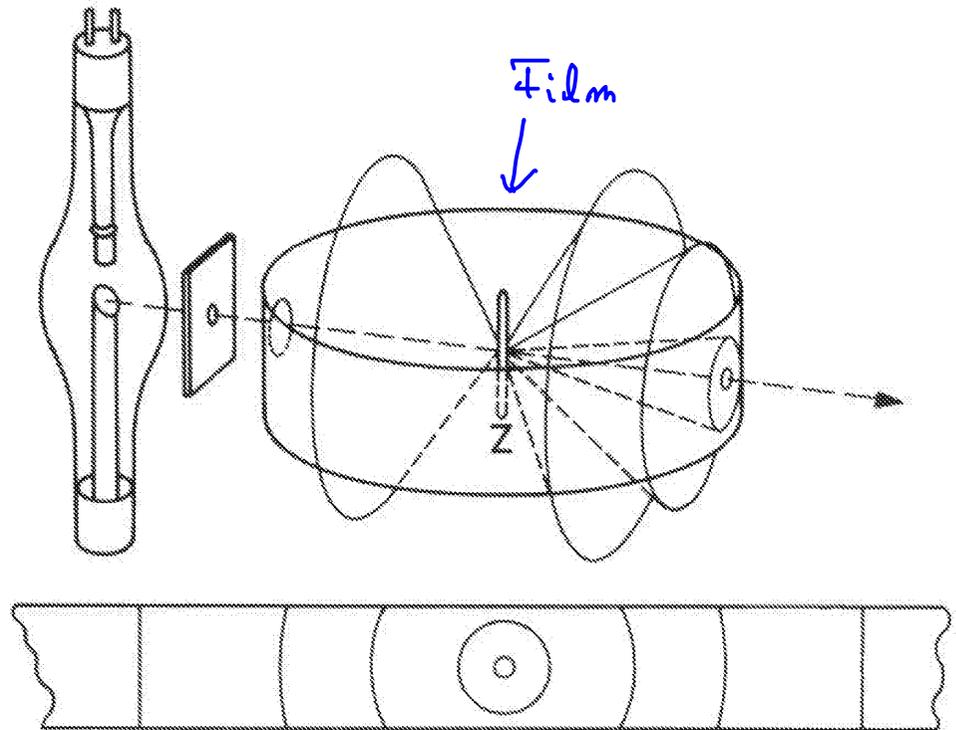
$$\text{für } n = 1, 2, 3, \dots$$



Nur wenn beide Bedingungen erfüllt sind ist konstruktive Interferenz zu beobachten.

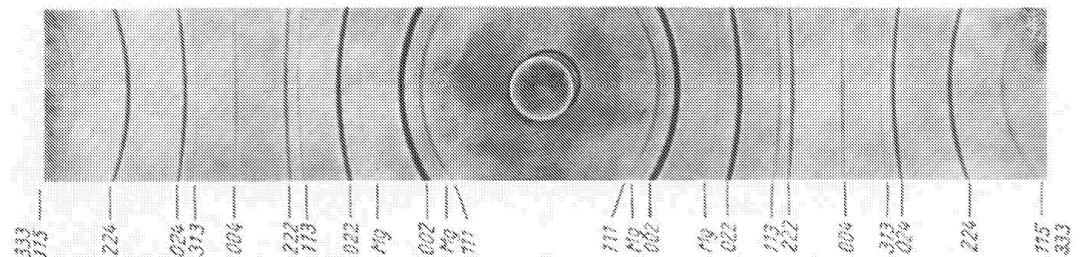
Debye-Scherrer Verfahren: Ein Beispiel zur Röntgenbeugung

- Beugung an polykristalliner oder pulverförmiger Probe (Z)
- monochromatische Röntgenquelle mit Hilfe von Filter oder unter Nutzung charakteristischer Röntgenlinien (Erklärung folgt in späterer Vorlesung)
- Interferenzmaxima liegen auf Kegeln



typisches Ergebnis:

- Konstruktive Interferenz unter Streuwinkeln die mit verschiedenen Gitterebenen im Kristall identifiziert werden können. Abbildung auf photographischem Film.

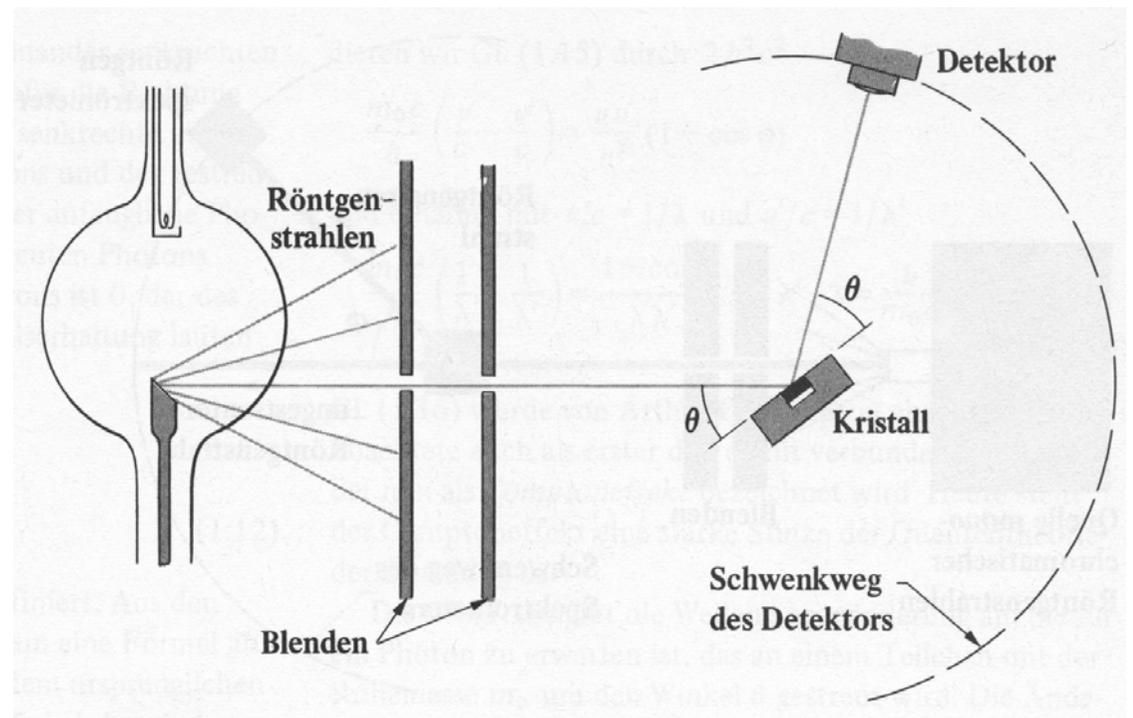


- typische Gitterkonstanten a :

NaCl	5.63 Å	(sc)	$1 \text{ Å} = 0.1 \text{ nm} = 10^{-10} \text{ m}$
KCl	6.29 Å	(sc)	
Cu	3.61 Å	(fcc)	
Al	4.05 Å	(fcc)	

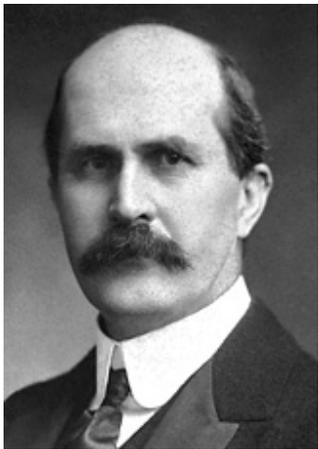
Messaufbau zur Röntgenbeugung:

- Übung: Bestimme die Gitterkonstante a des kubischen Gitters von NaCl ausgehend von seiner Dichte ρ und der molaren Masse. Unter welchen Winkeln treten Intensitätsmaxima in der Röntgenbeugung auf?
- Ebenfalls: Bestimmung der Wellenlänge bei bekannter Gitterkonstante.



Nobel Preis in Physik (1915)

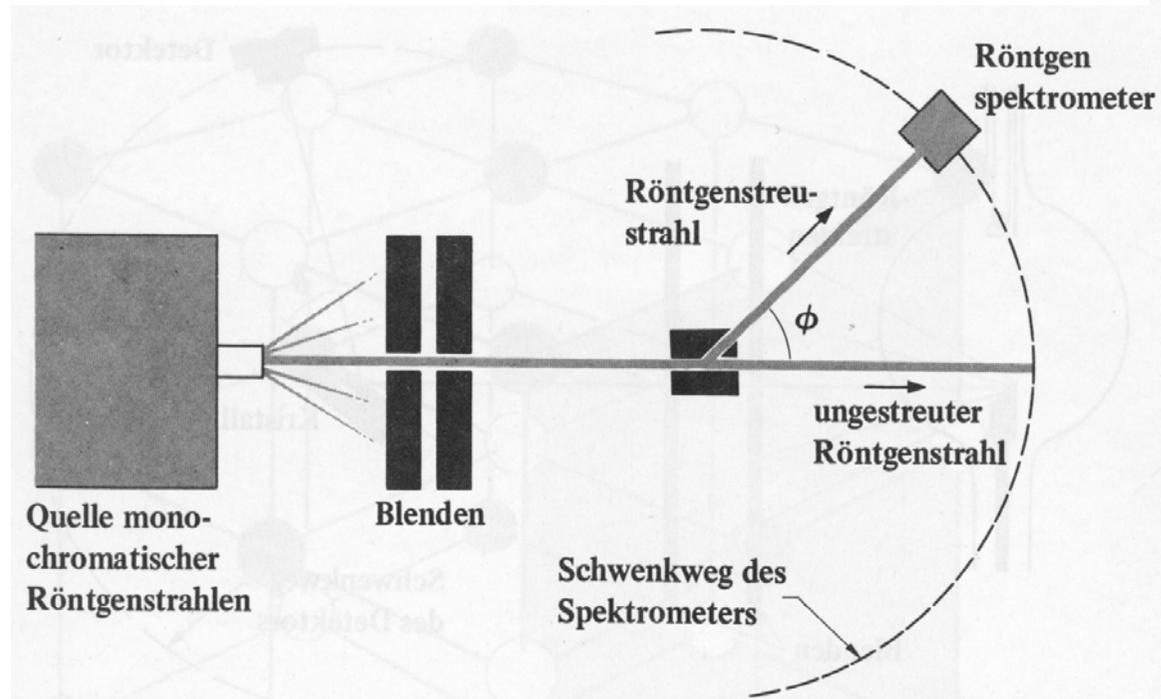
Sir William Henry Bragg William Lawrence Bragg



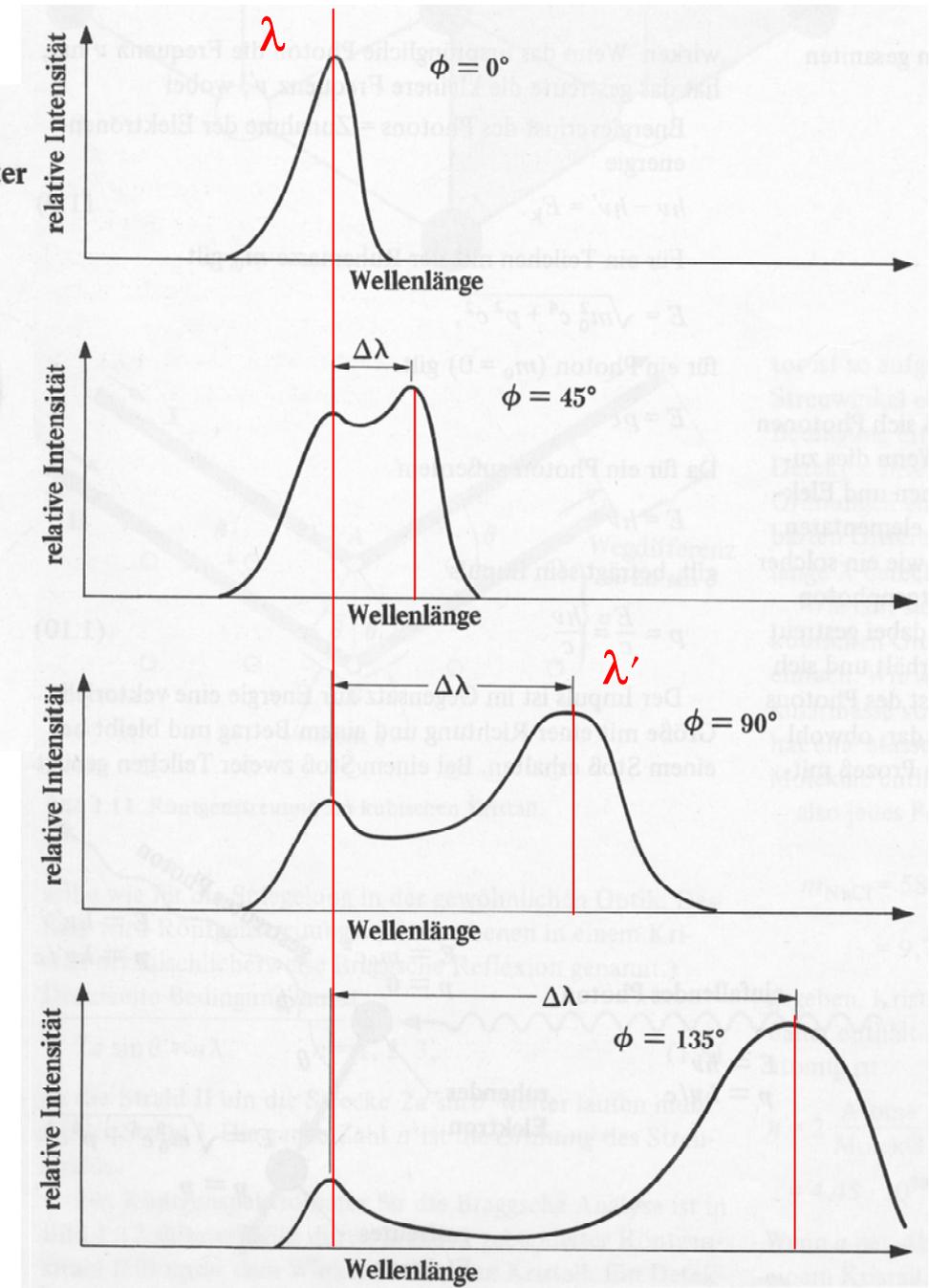
"for their services in the analysis of crystal structure by means of X-rays"

1.4 Der Compton-Effekt

betrachte die Streuung von Röntgen-Photonen an (quasi) freien Elektronen (Experiment in der Vorlesung)



Compton-Spektren: Abhängigkeit der gestreuten Intensität von der Wellenlänge



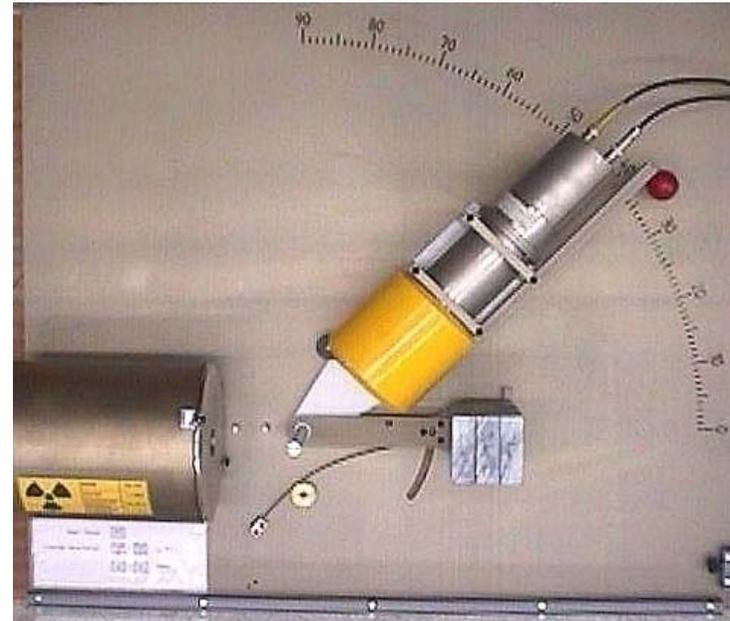
- unter $\phi = 0$ gemessenes Spektrum zeigt Maximum bei Wellenlänge λ der einfallenden Photonen
- unter Streuwinkeln $\phi > 0$ tritt ein zusätzliches (Compton) Maximum bei der Wellenlänge λ' auf
- bei $\phi > 0$ verbleibt ein Maximum im Spektrum bei der Wellenlänge λ durch Streuung an stärker gebundenen Elektronen (kann als höhere effektive Masse des Elektrons m_0^* , die durch stärkere Bindung an den Atomkern auftritt, erklärt werden)

1.4.1 Experiment zum Compton-Effekt

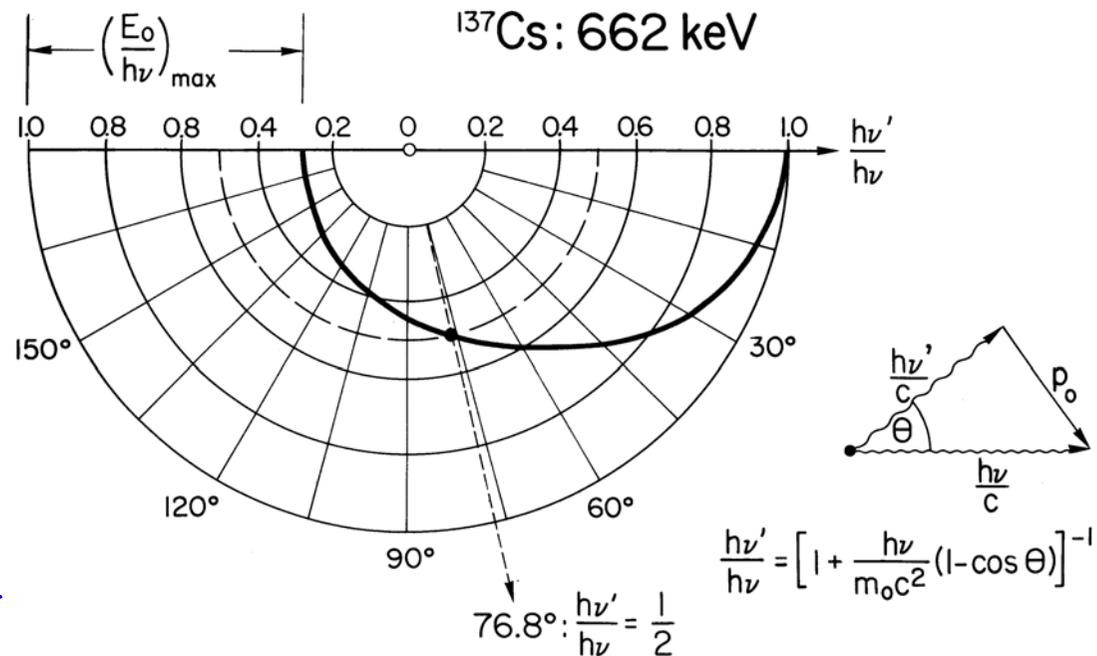
Nachweis des Impulses eines Photons.

Aufbau:

- Quelle hochenergetischer Photonen (Röntgenstrahlen, oder hier Gammastrahlen)
- Streukörper mit (quasi) freien Elektronen. Freies Elektronengas in gut leitfähigen Festkörpern, hier Cu.
- Photodetektor, hier Szintillationszähler mit Sekundärelektronenvervielfacher

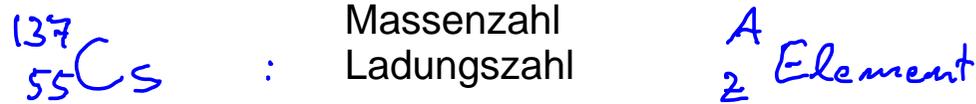


Messergebnis:

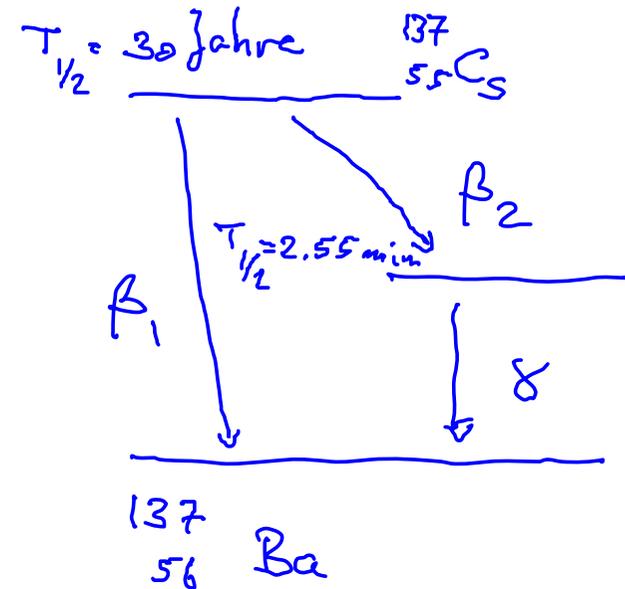
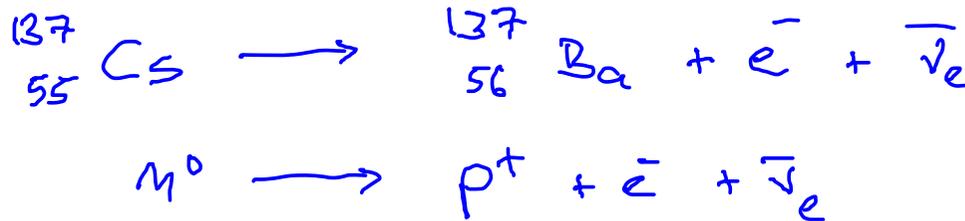


Quelle für hochenergetische Photonen: Gamma-Strahlung

Quelle:



β Zerfall:



Elektronenenergie:

$\beta_1 = 1.167 \text{ MeV} \quad 6.5\%$

$\beta_2 = 0.514 \text{ MeV} \quad 93.5\%$

Gamma-Energie:

$\gamma = 0.662 \text{ MeV} \sim 1.6 \cdot 10^{20} \text{ Hz} \sim 1.8 \cdot 10^{-12} \text{ m}$

Aktivität:

$1.7 \text{ MBq} = 1.7 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{s}}$

Bq, Becquerel: Anzahl der Zerfälle pro Sekunde

Dosis:

$0.8 \text{ } \mu\text{Sv/h} = 0.8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{J}}{\text{kg h}} \sim 7 \text{ mS/Jahr}$

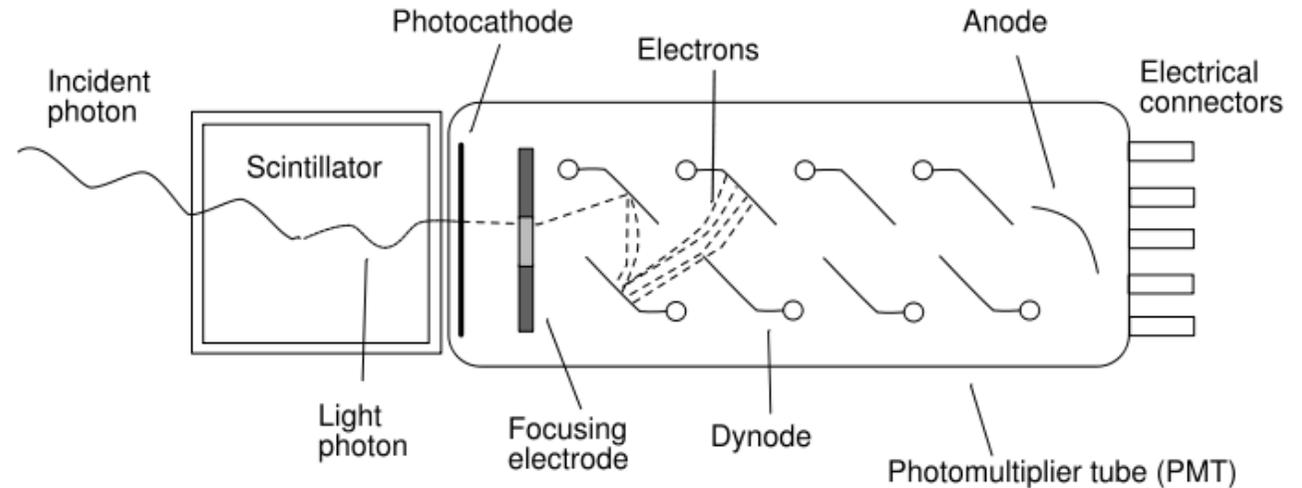
Dosis durch kosmische Strahlung und natürliche Radioaktivität:

2 mSv/Jahr

Sv, Sievert: Dosisäquivalent

Detektor für hochenergetische Photonen (Gamma-Strahlung)

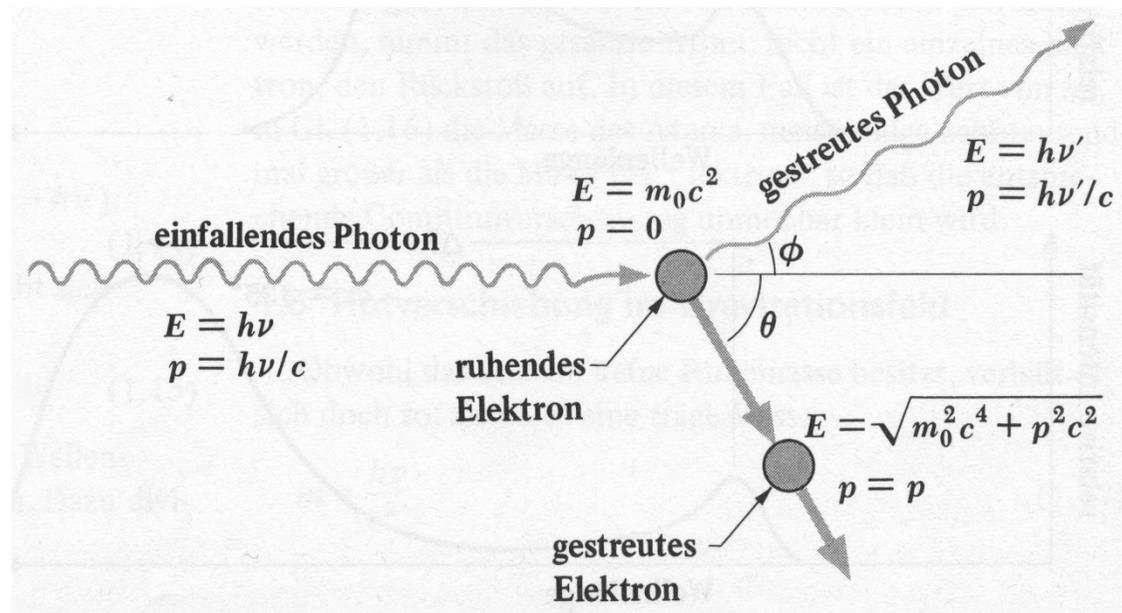
Szintillationszähler mit
Sekundärelektronenvervielfacher:



- Ein hochenergetisches einfallendes Photon ($\sim 1 \text{ MeV}$) wird im Szintillator in viele niederenergetische Photonen ($\sim 1 \text{ eV}$) im sichtbaren Wellenlängenbereich umgewandelt.
- Sichtbare Photonen werden in der Photokathode in Elektronen umgewandelt (photoelektrischer Effekt).
- Elektronen werden im Sekundärelektronenvervielfacher beschleunigt und vervielfacht und in der Anode detektiert und als Strompuls gemessen.
- Die integrierte Ladung in einem Strompuls ist proportional zur Energie des einfallenden Photons.
 - ermöglicht die Messung des Spektrums der gestreuten Photonen

1.4.2 Erklärung des Compton-Effekts:

Energie- und Impulserhaltung beim elastischen Stoss zwischen Photon und quasi-freiem Elektron (Bindungsenergie vernachlässigbar)



Impuls eines Photons: Im Vakuum breiten sich Photonen mit der Lichtgeschwindigkeit $c \sim 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ aus. Sie verhalten sich wie relativistische Teilchen mit verschwindender Ruhemasse $m_0 = 0$.

relativistische Energie eines Teilchens:

$$E_0 = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$$

Ruhemasse des Photons:

$$m_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_0 = pc$$

Energie des Photons:

$$E_0 = h\nu$$

Impuls des Photons:

$$p = \frac{h\nu}{c}$$

Wellenlängendifferenz $\lambda' - \lambda$ zwischen einfallendem und gestreutem Photon

vorher nachher nachher

Energieerhaltung:

$$\underbrace{h\nu - h\nu'}_{\text{Photon}} = E_{\text{kin}} \quad (0)$$

Elektron

Impulserhaltung:

- entlang der Einfallsrichtung

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \phi + p \cos \theta \quad (1)$$

- senkrecht dazu

$$0 = \frac{h\nu'}{c} \sin \phi - p \sin \theta \quad (2)$$

löse nach Elektronimpuls p :

$$E_{q.(1)}^2 + E_{q.(2)}^2$$

$$p^2 = \frac{1}{c^2} \left((h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2h\nu h\nu' \cos \phi \right) \quad (3)$$

Gesamtenergie des Elektrons
nach Stoss:

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} \stackrel{!}{=} E_{\text{kin}} + m_0 c^2 \quad (4)$$

kinetische Energie

Ruheenergie

Gl. (4) und (0):

$$p^2 = \frac{1}{c^2} \left((h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2h\nu h\nu' + 2(h\nu - h\nu') m_0 c^2 \right) \quad (5)$$

(3) = (5) ergibt:

$$2h\nu h\nu' (1 - \cos \phi) = 2(h\nu - h\nu') m_0 c^2 \quad (6)$$

mit $c = \lambda \nu$:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \phi)$$

Compton-Wellenlänge λ_C

$$\lambda_C = \frac{h}{m_0 c} = 2.4 \times 10^{-12} \text{ m}$$

unabhängig von Material
oder λ des Lichts

Verhältnis der gestreuten und einfallenden Photonenergie, berechne $h\nu'$ aus (6) :

$$\frac{h\nu'}{h\nu} = \left(1 + \frac{h\nu}{m_0 c^2} (1 - \cos \phi) \right)^{-1}$$

Compton-Effekt ist beobachtbar für:

- Photonen ausreichend hoher Energie (ansonsten nur kleiner relativer Wellenlängenunterschied)
- kleine e^- Bindungsenergie



Nobelpreis in Physik (1927)

"for his discovery of the effect named after him"

Die Beobachtung des Compton-Effekts weist deutlich nach, dass Photonen einen Impuls besitzen, und bestätigt so ebenfalls, dass Licht Teilchencharakter hat.

Literatur zum Compton-Effekt:

Kaenzig: Abschnitt 1.5

Beiser: Abschnitt 2.7

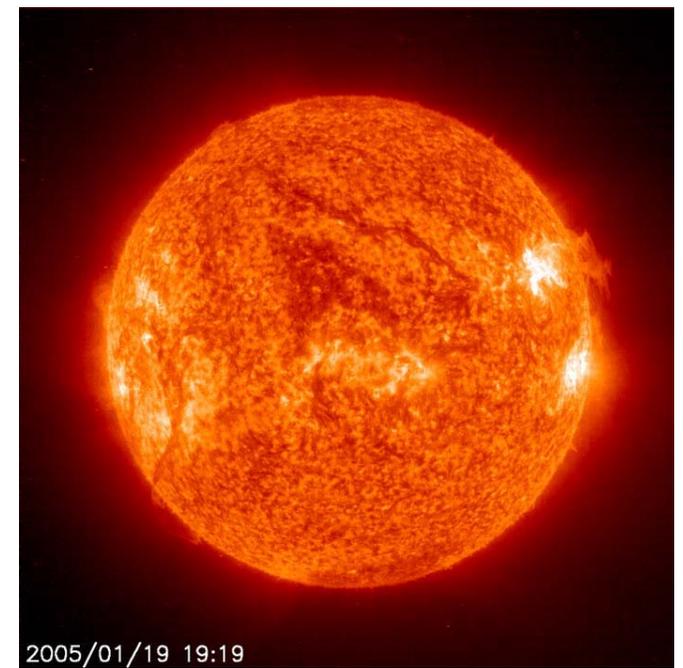
Haken&Wolf: Abschnitt 5.4

1.5 Schwarze Strahler, Temperaturstrahlung

- Alle Körper bei endlicher Temperatur erzeugen elektromagnetische Strahlung (Temperaturstrahlung)
- Frequenzverteilung (Spektrum) des Lichts ist abhängig von der Temperatur T
 - sichtbares Licht bei hohen Temperaturen ($T > 1000\text{ K}$)
 - infrarotes Licht bei $T < 1000\text{ K}$
 - Mikro- und Radiowellen bei $T < 10\text{ K}$
- Das Spektrum ist kontinuierlich und lässt sich nicht mit Mitteln der klassischen Physik erklären.
- Die Quantisierung der elektromagnetischen Strahlung in Form von Photonen der Energie $h\nu$ ist nötig zur Erklärung (Planck, 1900)

Die Sonne: ein schwarzer Strahler

- Temperatur $T \sim 6000\text{ Kelvin}$
- Strahlungsleistung $\sim 100 \cdot 10^9\text{ GW}$
- Intensität auf der Erdoberfläche 1 kW/m^2
- Kernfusion ($\text{H}_2 \rightarrow \text{He}$)

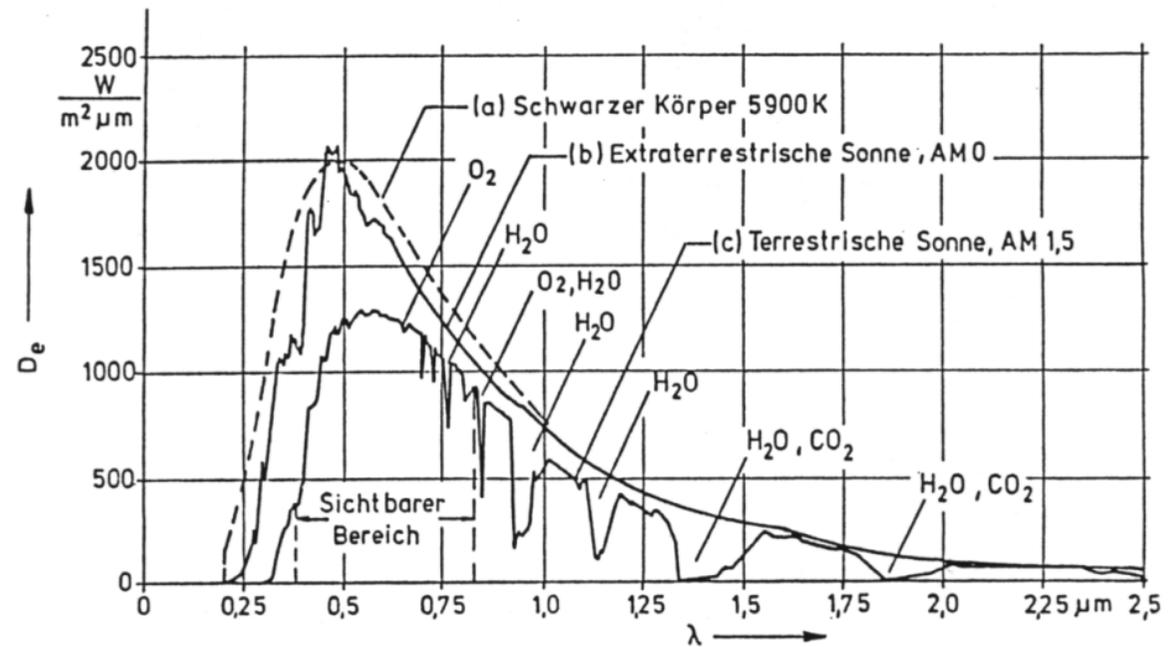


Die Sonne



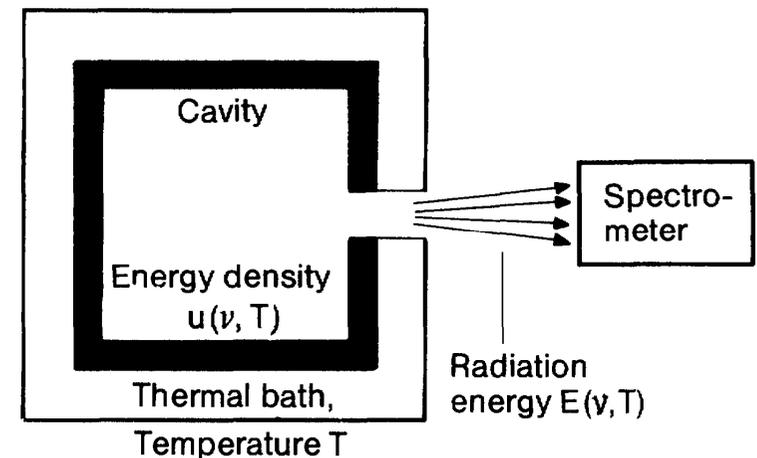
Untergang eines schwarzen Strahlers in Zürich

- Spektrum der Sonne:
 - kontinuierlich
 - grösste Intensität im sichtbaren Wellenlängenbereich
- Vorlesungsexperiment: Messung des Spektrums einer Bogenlampe



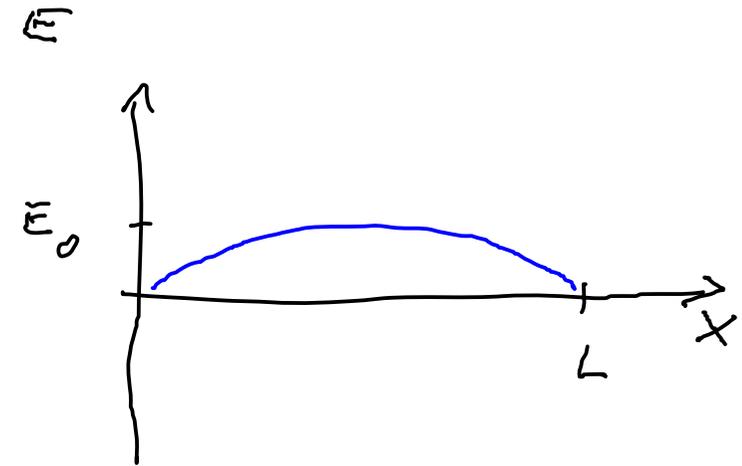
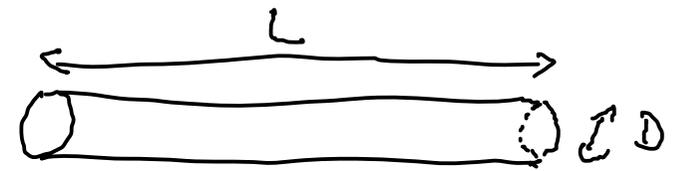
Berechnung des Spektrums eines schwarzen Strahlers

- Betrachte eine Quelle thermischer Strahlung als einen mit Photonen gefüllten Hohlraum mit der Kantenlänge L und dem Volumen $V = L^3$ bei der Temperatur T .
- Die Wände des Hohlraums emittieren und absorbieren Strahlung mit gleicher Rate und sind im thermischen Gleichgewicht mit der Strahlung im Inneren des Hohlraums (Vorlesungsexperiment).
- Die Energiedichte $u(\nu)$ im Inneren des Körpers kann durch eine kleine Öffnung, die das thermische Gleichgewicht nicht beeinflusst, bestimmt werden.
- Definition Energiedichte $u(\nu)$: Strahlungsenergie im Frequenzbereich $\nu \dots \nu + d\nu$ pro Volumen V



1.5.1 Der 1D schwarze Strahler:

- Objekt der Länge L und Durchmesser $D \ll L$ bei fester Temperatur T .
- Beispiel für einen realen 1D schwarzen Strahler: ein Koaxialkabel oder Hohlleiter bei ausreichend niedrigen Temperaturen
- Elektromagnetische Energie ist in Form von stehenden elektromagnetischen Wellen in diesem Objekt gespeichert.
- **Frage:** Wieviel elektromagnetische Energie U ist in einem solchen Objekt bei Temperatur T gespeichert?



Vorgehensweise:

- a. Bestimme die Energie U , die in einer einzelnen stehenden Welle (einer Mode) bei fester Wellenlänge λ oder Frequenz ν gespeichert ist.
- b. Bestimme die Anzahl der möglichen stehenden Wellen (Moden) in Abhängigkeit von der Frequenz.
- c. Bestimme die Gesamtenergie der im Objekt gespeicherten elektromagnetischen Strahlung durch Aufsummieren der Energie der einzelnen Moden.

(a) Energie einer stehenden elektromagnetischen Welle:

- klassische Energiedichte:

$$w = \frac{1}{2}(ED + HB) = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\mu \mu_0} B^2$$

- Energie ist gleichverteilt zwischen elektrischem Feld E und magnetischem Feld B .
- Die Energie einer Mode ist proportional zur Feldamplitude (E_0, B_0), kann also beliebige Werte annehmen.

- statistische Physik: Die mittlere Energie einer Mode beträgt im thermischen Gleichgewicht nach dem Gleichverteilungssatz $k_B T / 2$ pro Freiheitsgrad.
→ Rayleigh-Jeans Gesetz

- Quantenmechanik: Die Energie einer Mode ist in Photonen der Energie $h\nu$ quantisiert. Die Anzahl der Photonen in einer Mode wird durch die Bose-Einstein Verteilungsfunktion f_{BE} bestimmt.
→ Plancksches Strahlungsgesetz

$$f_{BE} = \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

(b) Anzahl der Moden und Modendichte in 1D:

- Resonanzbedingung:

$$j \frac{\lambda_j}{2} = L \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

- Modenindex j :

$$j = \frac{2L}{\lambda_j} = \frac{2L}{c} \nu_j$$

- niedrigste mögliche Frequenz

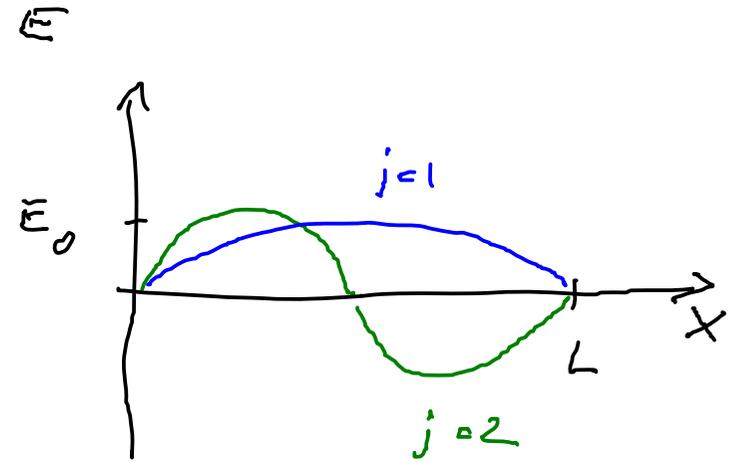
$$\nu_1 = \frac{c}{2L}$$

- Anzahl J der Moden bis zur Frequenz ν :

$$J = \frac{2L}{c} \nu = \frac{\nu}{\nu_1}$$

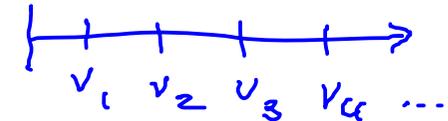
- Spektrale Modendichte $g(\nu)$: Anzahl Moden dJ pro Frequenzintervall $d\nu$

$$g(\nu) = \frac{dJ}{d\nu} = \frac{2L}{c} = \text{const.}$$



Moden sind gleichverteilt
in der Frequenz

$$\nu = j \frac{c}{2L} = j \nu_1$$

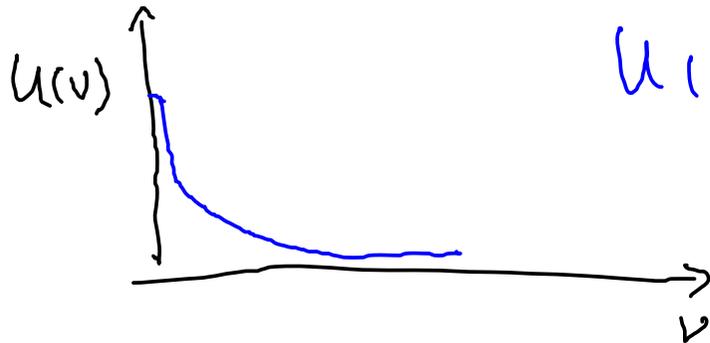


- (c) Energie $U(\nu)$ im Frequenzintervall $d\nu$ in statistischer Näherung (**Rayleigh-Jeans**):

$$U(\nu) d\nu = k_B T d\zeta = k_B T \frac{2L}{c} d\nu$$

- die Energie des 1D schwarzen Strahlers ist in dieser Näherung in der Frequenz gleichverteilt
- sie ist proportional zur Temperatur T (gilt nur für $h\nu < k_B T$)

- Energie $U(\nu)$ im Frequenzintervall $d\nu$ nach **Planck**:



$$U(\nu) d\nu = h\nu f_{BE} d\zeta$$

$$= h\nu \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \frac{2L}{c} d\nu$$

für niedrige Frequenzen $h\nu < k_B T$

$$\sim h\nu \frac{1}{\left(1 + \frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} \frac{2L}{c} d\nu = k_B T \frac{2L}{c} d\nu$$

für hohe Frequenzen $h\nu > k_B T$

$$\sim h\nu e^{-h\nu/k_B T} \frac{2L}{c} d\nu$$

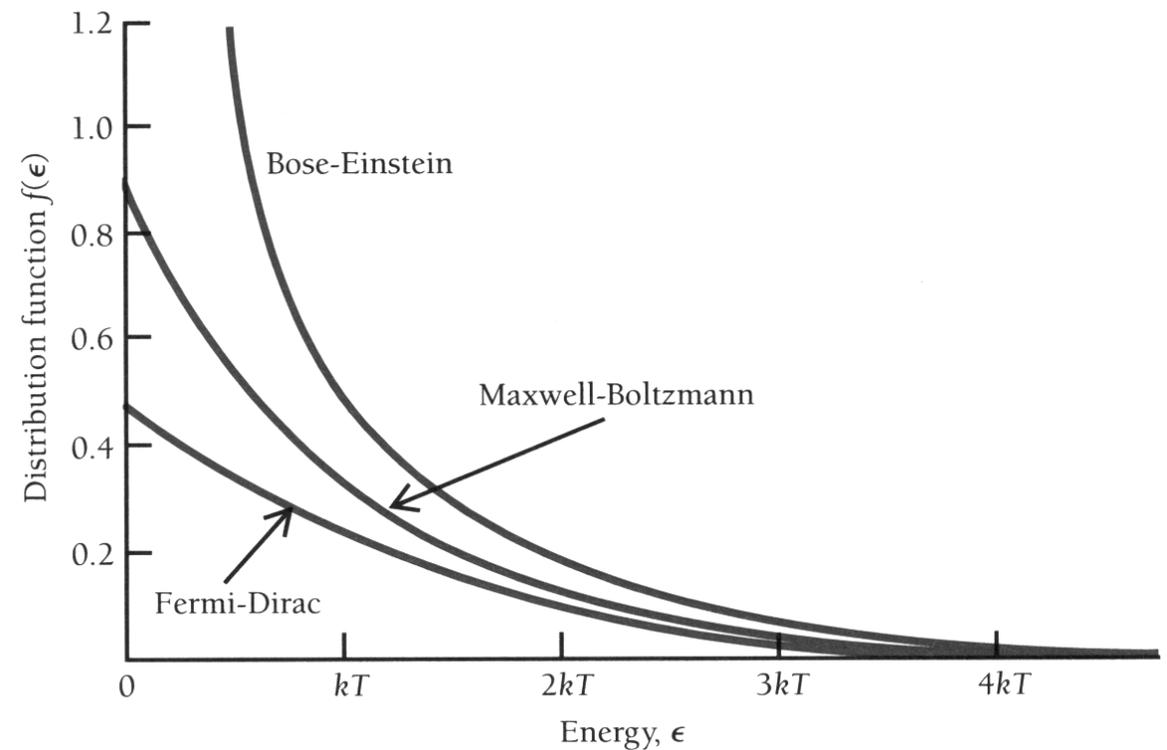
- Energiedichte $u(\nu)$ (1D, pro Länge L):

$$u(\nu) d\nu = \frac{U(\nu)}{L} d\nu$$

1.5.2 Quantenmechanische Energie und Besetzung der Moden

- Plancksche Hypothese: Die in jeder Mode gespeicherte Energie $E = n h \nu$ ist in Einheiten der Photonenergie $h \nu$ quantisiert.
- n ist die Anzahl der Photonen in einer Mode (vgl. quantenmechanischer harmonischer Oszillator, siehe spätere Vorlesung).
- Die Besetzung der verschiedenen zur Verfügung stehenden Moden des Hohlraums mit Photonen wird durch die Bose-Einstein Verteilungsfunktion f_{BE} beschrieben.

$$f_{BE}(\nu) = \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$



$$\epsilon = \frac{h\nu}{kT}$$

1.5.3 Berechnung der Energiedichte für einen 3D schwarzen Strahler:

- Die Wände eines kubischen Hohlraums mit Volumen L^3 und Kantenlänge L seien perfekte Reflektoren.
- Dann muss die elektromagnetische Strahlung im Hohlraum stehende Wellen bilden.

- Resonanzbedingung entlang der Koordinate i .

$$j_i \frac{\lambda_i}{2} = L_i \quad i = x, y, z$$

$$j_i = 1, 2, 3, \dots$$

- Modenindex j_i zur Richtung $i = x, y, z$

$$j_i = \frac{2L_i}{\lambda_i} = \frac{2L_i}{c} \nu_i$$

- Für eine stehende Welle der Wellenlänge λ entlang einer beliebigen Richtung gilt (Resonanzbedingung)

$$j^2 = j_x^2 + j_y^2 + j_z^2 = \left(\frac{2L}{\lambda_i}\right)^2 = \left(\frac{2L}{c} \nu_i\right)^2$$

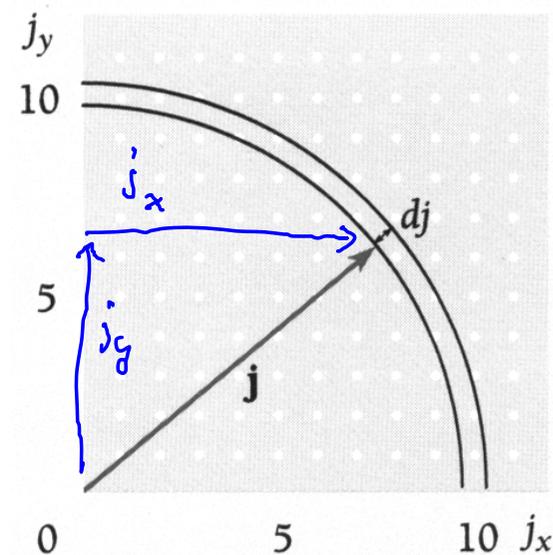
mit $j_x, j_y, j_z \in [1, 2, 3, \dots]$

- Anzahl J der Moden mit Wellenlänge kleiner als λ_j (Frequenz grösser als ν_j)

$$J = \frac{1}{8} \cdot 2 \cdot \frac{4\pi}{3} j^3 = \frac{8\pi}{3} \frac{L^3}{c^3} \nu^3$$

positive j_i

2 Polarisierungen



- Zahl der Moden $g(\nu)$ pro Frequenzintervall $d\nu$:

$$g(\nu) = \frac{dJ}{d\nu} = 8\pi \frac{L^3}{c^3} \nu^2$$

- Modendichte $G(\nu)$ (Zahl der Moden pro Volumen $V = L^3$) pro Frequenzintervall $d\nu$:

$$G(\nu) = \frac{g(\nu)}{L^3} = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2$$

- quadratische Abhängigkeit von der Frequenz ν
- unabhängig von der Form des Hohlraums

1.5.4 Rayleigh-Jeans Gesetz

Berechnung des Spektrums unter Annahmen der **klassischen Physik**: Jede Mode hat zwei Freiheitsgrade, die wie ein harmonischer Oszillator beschrieben werden können.

Gleichverteilungssatz: Im thermischen Gleichgewicht bei der Temperatur T trägt jede Mode die Energie $k_B T$ zur Gesamtenergie eines Systems bei.

Energiedichte $u(\nu)$ der elektromagnetischen Strahlung im Hohlraum pro Frequenzintervall $d\nu$:

$$u(\nu) = kT G(\nu) = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} kT$$

Dieses nach Rayleigh-Jeans benannte Gesetz für die Energiedichte eines schwarzen Strahlers ist nur für Frequenzen $h\nu$, die klein sind gegenüber der Temperatur kT , gültig.

$u(\nu)$ divergiert für grosse Frequenzen ν (Ultraviolett katastrophe) und muss daher falsch sein. Dieses Problem kann nur mit Hilfe der Quantenmechanik gelöst werden.

1.5.5 Plancksches Strahlungsgesetz:

- Die Gesamtenergiedichte $u(\nu)$ pro Frequenzintervall $d\nu$ ergibt sich dann zu:

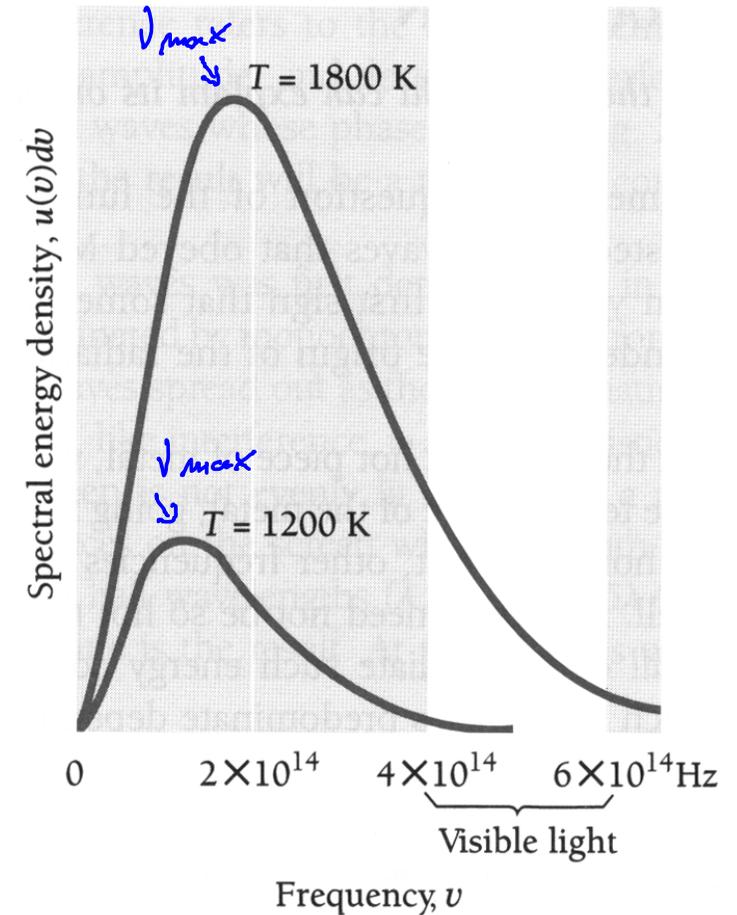
$$u(\nu) = h\nu G(\nu) f_{BE}(\nu) \\ = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

Dies ist das **Plancksche Strahlungsgesetz**. Es beschreibt das Spektrum der elektromagnetischen Strahlung eines jeden Körpers (Sonne, Glühlampen, ...) im thermischen Gleichgewicht bei der Temperatur T .

Eine weitere Herleitung dieses Gesetzes (nach Einstein) wird im Zusammenhang mit dem Laser diskutiert.

Charakteristische Eigenschaften des Spektrums:

- temperaturabhängiges Maximum der Energiedichte bei ν_{max}
- Anstieg von $u(\nu)$ proportional zu ν^2 bei niedrigen Frequenzen $\nu < \nu_{max}$
- exponentieller Abfall von $u(\nu)$ mit $e^{-\nu}$ bei hohen Frequenzen $\nu > \nu_{max}$
- temperaturabhängiges Maximum der Energiedichte bei ν_{max}
- Gesamtenergie integriert über alle Frequenzen skaliert mit T^4



1.5.6 Das Wiensche Verschiebungsgesetz:

- Bestimme die Wellenlänge bei der ein schwarzer Strahler ein Maximum an Energie abstrahlt.
 - drücke das Strahlungsgesetz in der Wellenlänge λ aus
 - finde Maximum

$$\frac{du(\lambda)}{d\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \lambda_{max}$$

Wiensches Verschiebungsgesetz:

$$\lambda_{max} T = \frac{hc}{4.965 k} = 2.9 \times 10^{-3} \text{ mK}$$

- Maximum der Strahlungsemission verschiebt sich mit steigender Temperatur T zu niedrigeren Wellenlängen λ_{max} .
- Schwarze Strahler bei einigen 1000 Grad emittieren im sichtbaren Wellenlängenbereich, während Körper bei Raumtemperatur vorwiegend im Infraroten emittieren.

- Beispiel: Sonne

$$T = 6000 \text{ K}$$

$$\lambda_{max} = 480 \text{ nm}$$

- Anwendung Pyrometrie: Bestimmung der Temperatur eines Objekts aus Messung des Strahlungsspektrums

1.5.7 Stefan-Boltzmann Gesetz

Bestimme die gesamte Energiedichte eines schwarzen Strahlers bei Temperatur T

$$u = \int_0^{\infty} u(\nu) d\nu = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3} T^4 = a T^4$$

- mit der universellen Konstanten a
- starke Abhängigkeit von der Temperatur T

Die von einem Objekt pro Zeiteinheit und Oberfläche abgestrahlte Energie R ist proportional zu T^4 . Diese Abhängigkeit wird **Stefan-Boltzmann Gesetz** genannt.

$$R = e \sigma T^4$$

mit der Stefan Konstanten σ :

$$\sigma = \frac{ac}{4} = 5.67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$$

und dem Emissionskoeffizienten e des Strahlers, der von $e = 0.07$ für polierten Edelstahl bis zu $e = 0.97$ für matte schwarze Oberflächen variiert.

Vorlesungsexperiment: Leslie-Würfel

1.5.8 Energiedichte $u(\nu) d\nu$ und Strahlungsflussdichte $P(\nu) d\nu$

- Definition: Energiedichte $u(\nu) d\nu$

$u(\nu) d\nu =$ Strahlungsenergie im Frequenzbereich $\nu \dots \nu + d\nu$ pro Volumen V

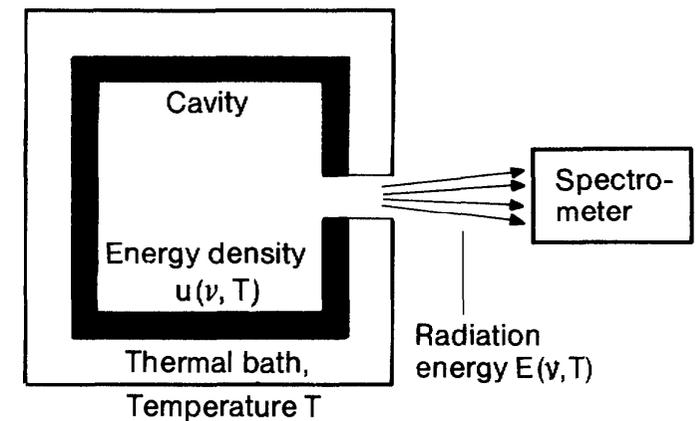
- Definition: spektrale Energiedichte $u(\nu)$:

$u(\nu) =$ Strahlungsenergie pro Volumen V und pro Frequenzintervall $d\nu$

- Messgröße: Strahlungsflussdichte $P(\nu)$

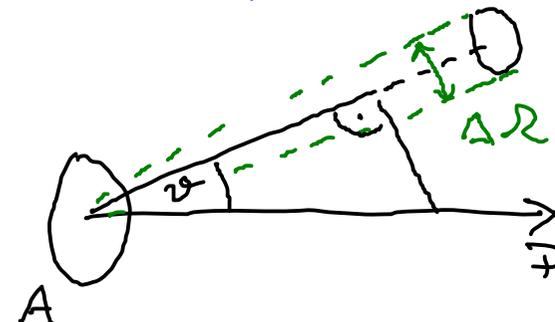
$P(\nu) d\nu =$ Strahlungsleistung im Frequenzbereich $\nu \dots \nu + d\nu$ pro Raumwinkel und pro Fläche

Energie E die von einem schwarzen Strahler mit Fläche A pro Zeitintervall Δt in ein Raumwinkelelement $\Delta\Omega$ unter einem Winkel θ zur Flächennormalen emittiert wird.



$$E(\nu) d\Omega = u(T, \nu) d\nu \quad c \Delta t \quad A \cos \theta \quad \frac{\Delta\Omega}{4\pi}$$

$$P(\nu) d\Omega = \frac{E(\nu) d\Omega}{\Delta t}$$



Literatur zur thermischen Strahlung:

Kaenzig: Abschnitt 1.1

Beiser: Abschnitt 2.2

Haken&Wolf: Abschnitt 5.2