

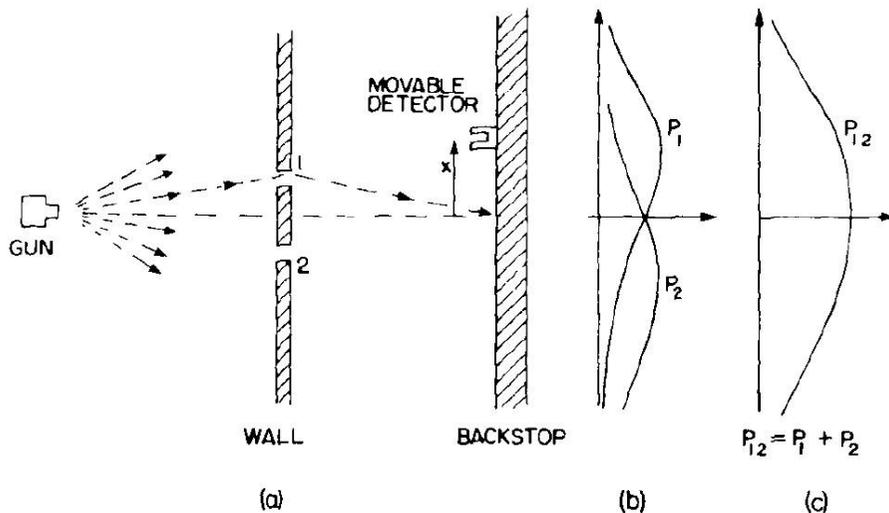
5. Interferenz und Unschärfe

5.1 Young Doppelspalt - Welle-Teilchen Dualismus

"We choose to examine a phenomenon which is impossible, absolutely impossible, to explain in any classical way, and which has in it the heart of quantum mechanics. In reality, it contains the only mystery." (Feynman)

Literatur: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. L. Sands, „The Feynman Lectures on physics“, Vol. III: Quantenmechanik“, Addison Wesley, Reading (Mass.) (1965)

Doppelspaltversuch mit klassischen Teilchen (Kugeln)



P_1 ... Auftreffwahrscheinlichkeit von Kugeln durch Spalt 1

P_2 ... Auftreffwahrscheinlichkeit von Kugeln durch Spalt 2

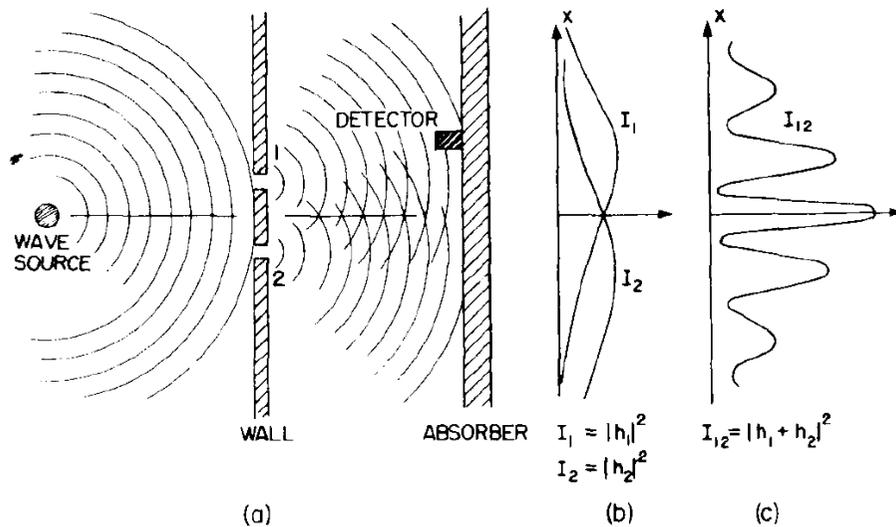
P_{12} .. Auftreffwahrscheinlichkeit von Kugel entweder durch Spalt 1 oder Spalt 2

- Einzelne Kugeln werden detektiert (click,..., click,click,...)
- Die Wahrscheinlichkeiten beider Möglichkeiten werden addiert:

$$P_{12} = P_1 + P_2$$

- **keine Interferenz**

5.1.1 Doppelspaltversuch mit (klassischen) Wellen



$h_1 e^{i\omega t} \dots$ Wellenfunktion von Spalt 1

$h_2 e^{i\omega t} \dots$ Wellenfunktion von Spalt 2

Intensitäten (Quadrat der Amplituden):

$I_1 = |h_1|^2 \dots$ Intensität von Welle durch Spalt 1

$I_2 = |h_2|^2 \dots$ Intensität von Welle durch Spalt 1

$I_{12} = |h_1 + h_2|^2 \dots$ Intensität von Welle durch Spalt 1 & 2

$$I_{12} = |h_1 + h_2|^2 = |h_1|^2 + |h_2|^2 + |h_1| |h_2| \cos \delta$$

- Intensität ist **kontinuierlich**, keine Einzelereignisse
- Die Amplituden beider Pfade werden addiert und anschließend quadriert.
- **Interferenz**

5.1.2 Doppelspaltversuch mit Materiewellen

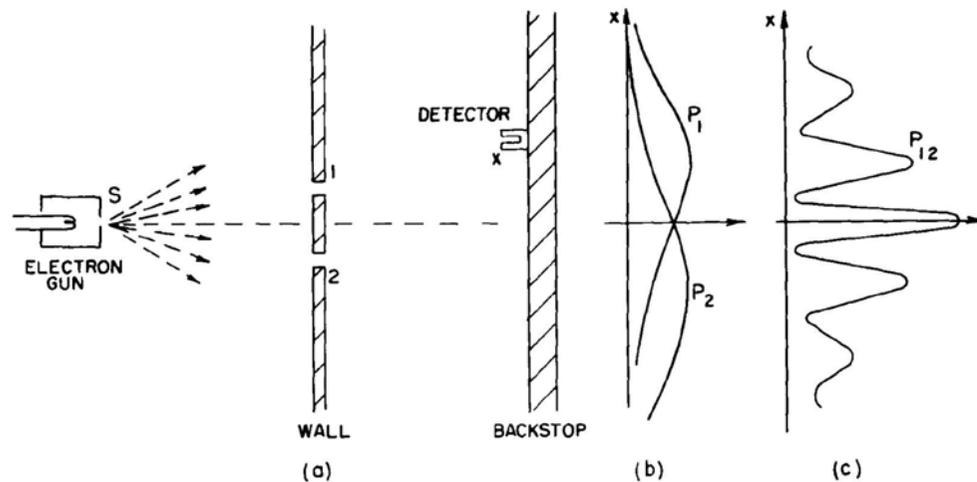


Fig 3-1. Interference experiment with electrons.

$\Psi_i = \dots$ Wellenfunktion von Elektronen durch Spalt i

$P_1 = |\Psi_1|^2 \dots$ Auftreffwahrscheinlichkeit für Elektronen durch Spalt 1

$P_2 = |\Psi_2|^2 \dots$ Auftreffwahrscheinlichkeit für Elektronen durch Spalt 2

Auftreffwahrscheinlichkeit für Elektronen durch Spalt 1 + Spalt 2:

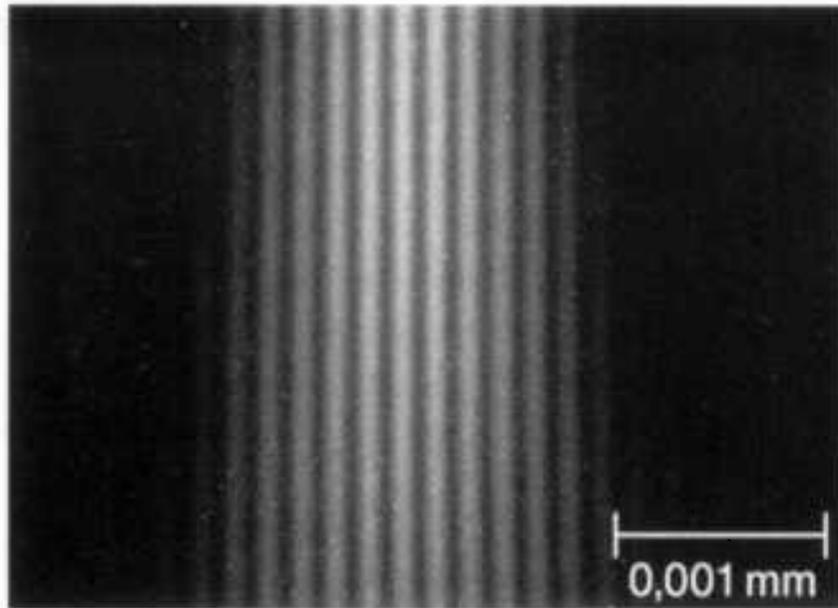
$$P_{12} = |\Psi_1 + \Psi_2|^2 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + 2 |\Psi_1| |\Psi_2| \cos \delta$$

- **Einzelne** Elektronen werden detektiert (click, click, ..., click, ... - **Teilcheneigenschaft**)
- **Interferenzterm** $\Psi_1^* \Psi_2 = |\Psi_1| |\Psi_2| \cos \delta$ führt zu konstruktiver bzw. destruktiver **Interferenz (Welleneigenschaft)**
- **Regel:** Die Amplituden der Wellen zu allen möglichen Pfaden werden addiert und das Betragsquadrat davon ergibt die Aufenthaltswahrscheinlichkeit.

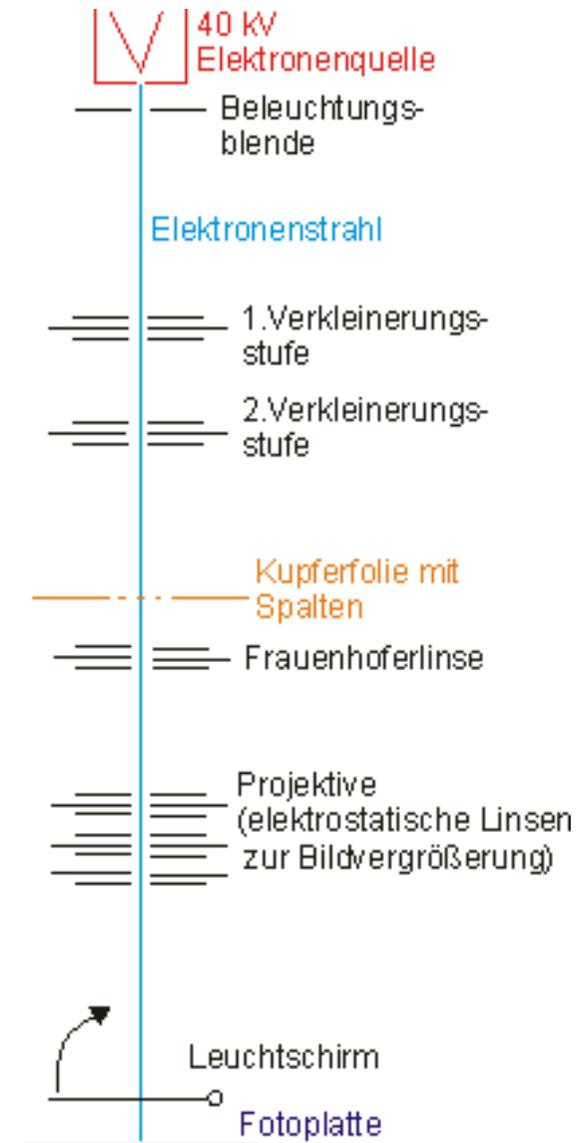
5.2 Experimente zum Doppelspalt

5.2.1 Elektronenbeugung am Doppelspalt (Jönsson - 1961)

"We should say right away that you should not try to set up this experiment..." (Feynman)



$\lambda = 0.05 \text{ \AA}$ ($E_{\text{kin}} = 50 \text{ keV}$)
Spaltabstand $1 \mu\text{m}$;
Spaltbreite $0.3 \mu\text{m}$
Masse $9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$



übersetzt auf Lichtoptik mit $\lambda = 5000 \text{ \AA}$: Spaltabstand $\sim 10 \text{ cm}$ und Spaltbreite $\sim 3 \text{ cm}$!

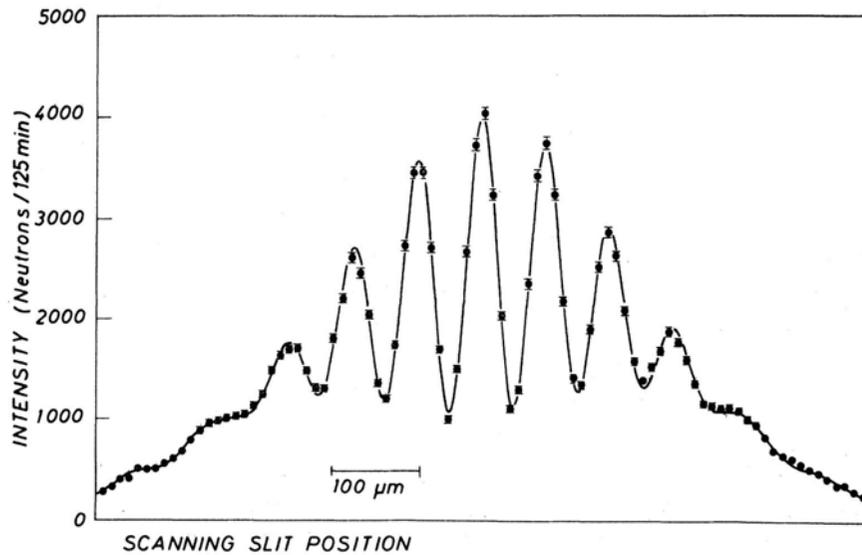
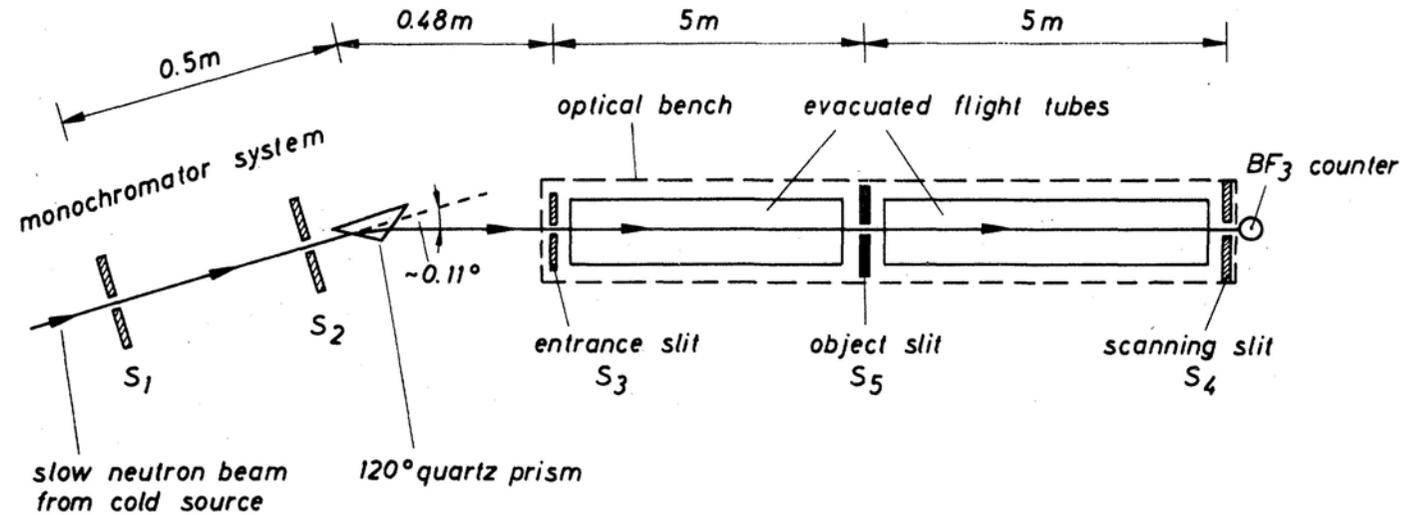
5.2.2 Neutronenbeugung am Doppelspalt

$$\lambda = 18.5 \text{ \AA}$$

Spaltabstand $125 \mu\text{m}$

Spaltbreite $20 \mu\text{m}$

Masse $1.7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

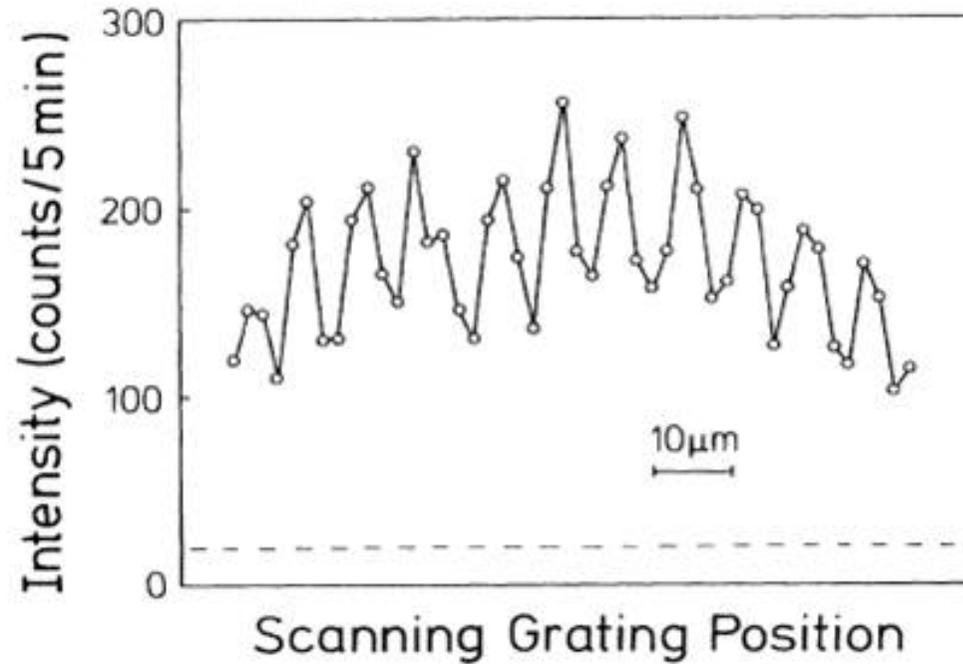
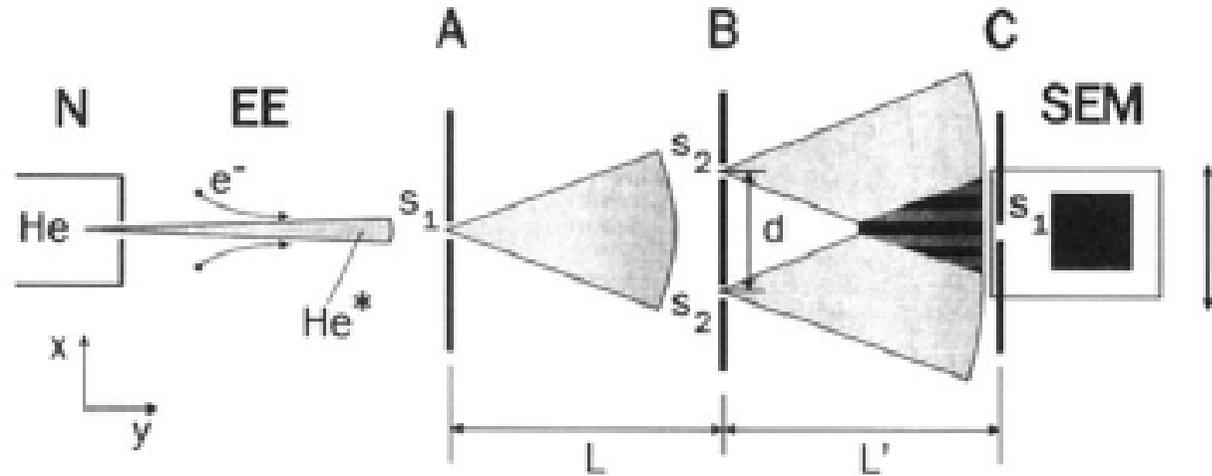


einzelne Neutronen interferieren mit sich selbst (alle 2 Sekunden ein Neutron, räumlicher Abstand ca. 400 m)

Zeilinger et al. (1988)

5.2.3 Atome am Doppelspalt (Helium)

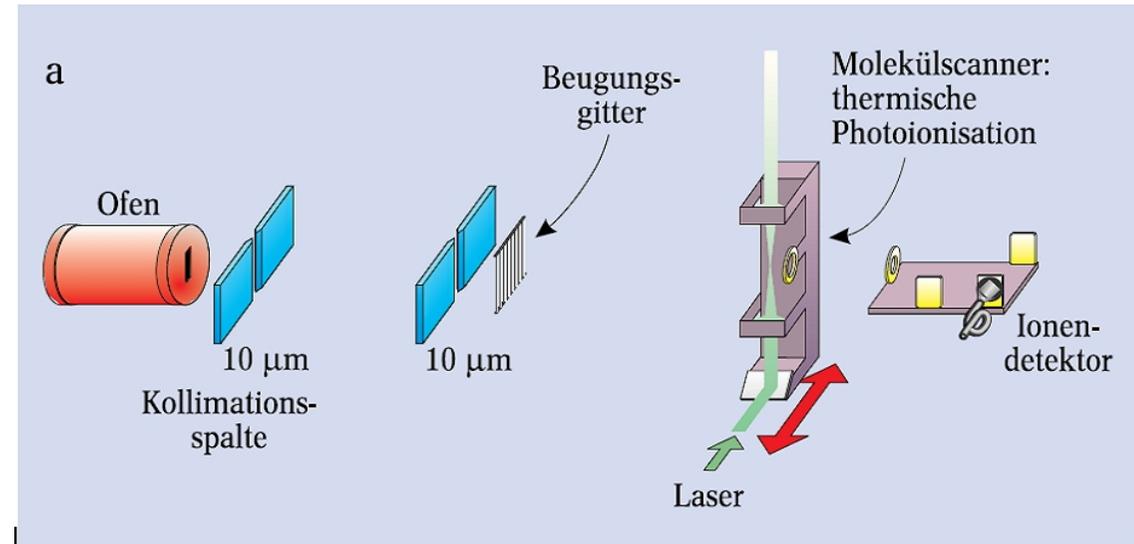
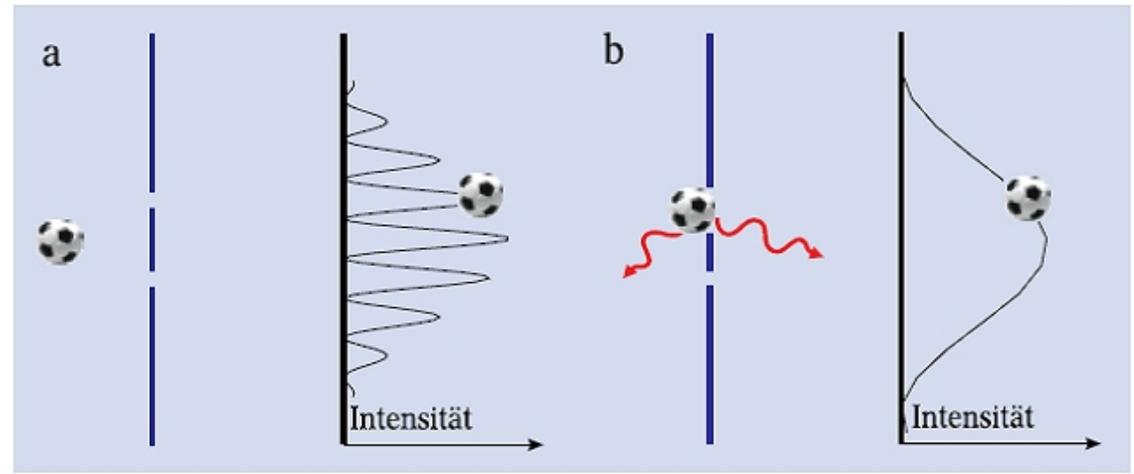
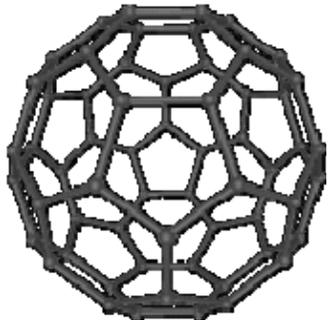
$\lambda = 1.03 \text{ \AA}$
Spaltabstand 8 \mu m
Spaltbreite 1 \mu m
Masse $6.7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$



O. Carnal and J. Mlynek (1991)

5.3.4 Moleküle

- Interferenz von C^{60} oder C^{70} Buckminster-Fullerenen (Bucky Balls, Nobelpreis in Chemie 1996)
- deBroglie Wellenlänge bei $T = 900\text{ K}$:
 $\lambda \sim 0.025\text{ \AA}$
- Interferenz bei ausreichender longitudinaler und lateraler Kohärenz beobachtbar

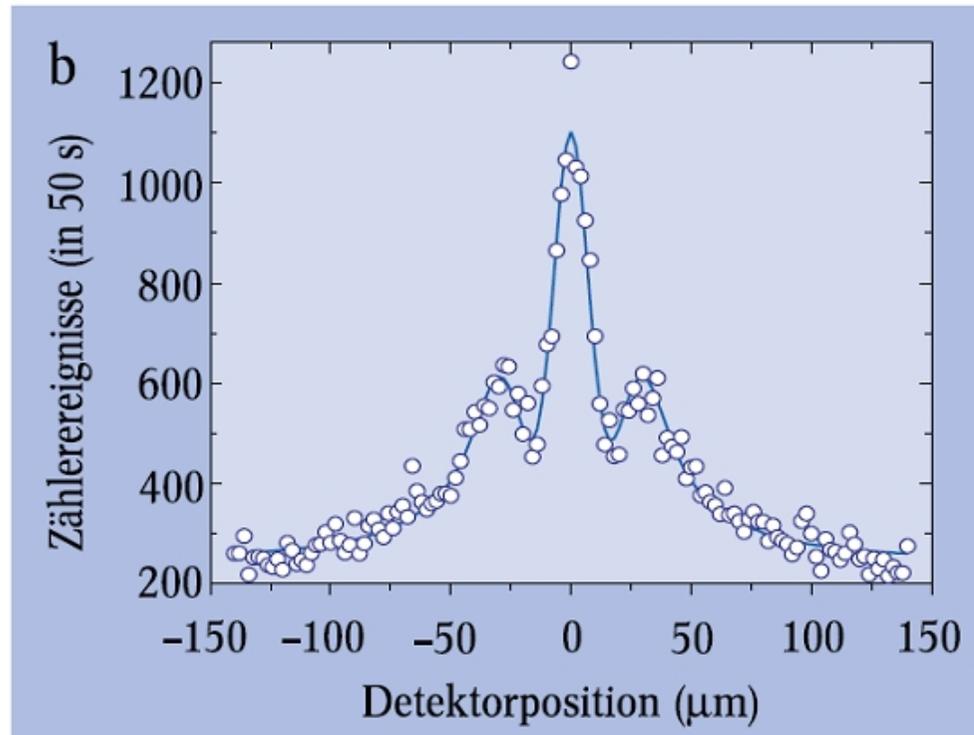


Experimenteller Aufbau:

- SiN Interferenzgitter mit 100 nm Gitterperiode und 50 nm Spaltbreite
- Ionisationsdetektor für einzelne Moleküle
- Interferenz einzelner Moleküle mit sich selbst

Ergebnisse:

- ortsaufgelöstes Interferenzmuster von Bucky Balls
- Massive Teilchen interferieren mit sich selbst
- Materiewellen



Interferenzexperimente am Doppelspalt Teilchen und Quanten

- [Photonen] *G. I. Taylor*, Proc. Cambridge, Phil. Soc. 15, 114 (1909)
- [Elektronen] *C. Jönsson*, Z. Phys. 161, 454 (1961)
- [Neutronen] *A. Zeilinger*, Rev. Mod. Phys 60, 1067 (1988)
- [Atome] *O. Carnal, J. Mlynek*, Phys. Bl., Mai 1991, S. 379
- [Cluster] *W. Schöllkopf, J. P. Toennies*, Science 266, 1345 (1994)
- [Bucky Balls] *M. Arndt et al.*, Nature 401, 680 (1999)

5.4 Welcher-Weg Information oder Interferenzmuster?

- Detektion des Wegs eines Elektrons durch Streuung von Photonen
- Damit die Interferenzmuster erhalten bleiben, muss der Impulsübertrag eines Photons kleiner als Ablenkung (=Impulsübertrag) der Spalte sein..

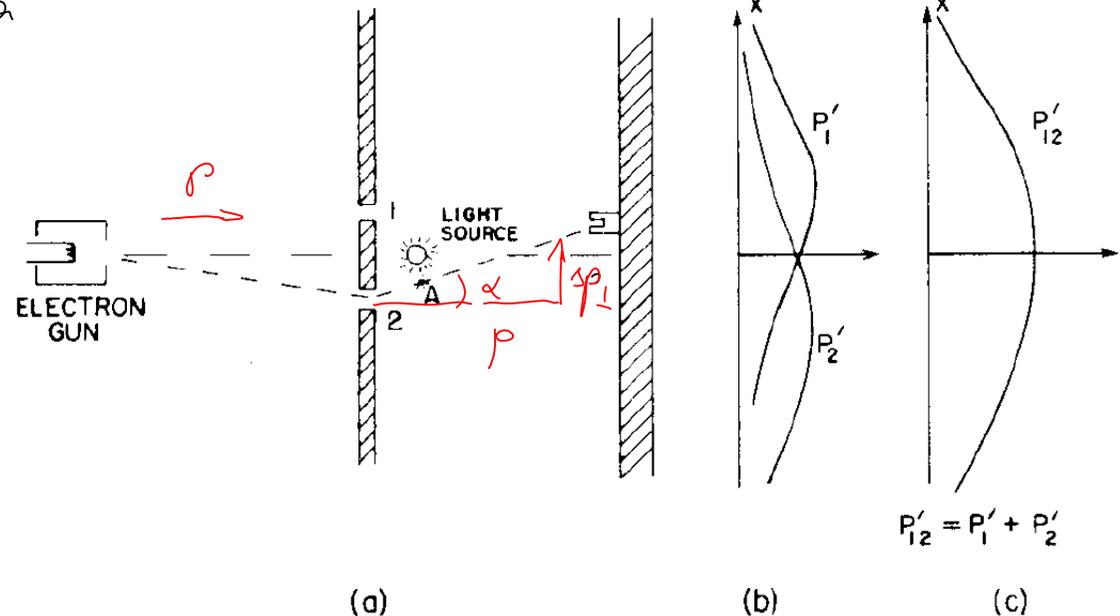
"If an apparatus is capable of determining which hole the electron goes through, it cannot be so delicate that it does not disturb the pattern in an essential way. No one has ever found (or even thought of) a way around the uncertainty principle." (Feynman)

$$\bullet \tan \alpha \sim \alpha = \frac{\Delta p_{\perp}}{p} < \theta_{\min} \quad \bullet \Delta p_{\perp} \approx p_{\text{photon}} = \frac{h}{\lambda_{\text{photon}}}$$

$$\frac{\Delta p_{\text{quer}}}{p} = \frac{h/\lambda_{\text{photon}}}{h/\lambda_{\text{electron}}} < \theta_{\min} \sim \frac{\lambda_{\text{electron}}}{a}$$

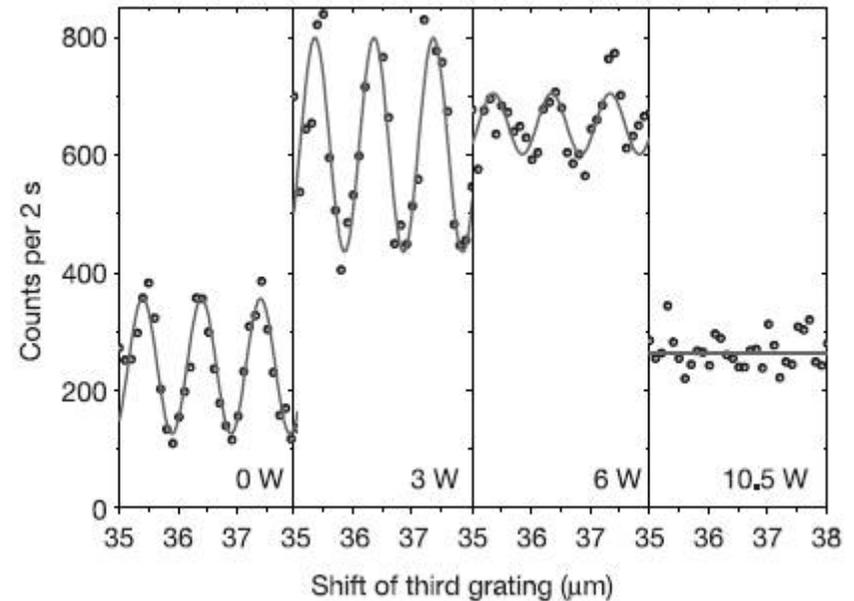
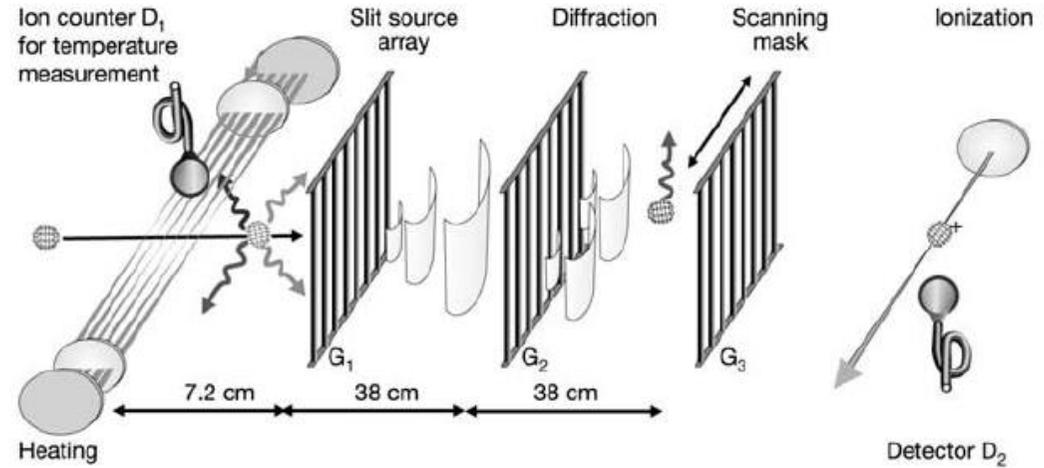
$$\Rightarrow \lambda_{\text{photon}} > a$$

Auflösungsvermögen maximal λ_{photon} :
keine Information über Weg des Elektrons



5.4.1 Welcher-Weg Messung durch thermische Emission

- C70 Moleküle werden an Gitter gebeugt (Masse $1.34 \cdot 10^{-24}$ kg)
- heiße Moleküle \rightarrow mehr Photonenemissionen
- Gitterkonstante $\sim 1 \mu$
- Lokalisierung der Moleküle durch thermische ($T \sim 2500$ K) Emission von Photonen ($\lambda \sim 0.5 \mu\text{m}$) nach dem Beugungsgitter
- Durch **Aufheizen** der Moleküle **verschwinden Interferenzmuster** (Welcher-Weg Information)



Hackermüller et al. (2004)

5.2. Heisenberg'sche Unschärferelation

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Eine der zentralen Eigenschaften der Quantenmechanik ist die Unschärfe in der Bestimmung von konjugierten Variablen:

- **x - p** (Ort - Impuls)
- **L_x - L_y** (Komponenten des Bahndrehimpuls)
- **σ_x - σ_y** (Komponenten des Spins)
- **N - φ** Teilchenzahl - Phase
- **E - t** (Energie - Zeit; unterscheidet sich aber von den obigen Beispielen, da Energie und Zeit keine konjugierten Variablen sind - t ist ein Parameter)

Komplementaritätsprinzip:

Die dynamischen Variablen eines jeden Freiheitsgrad bilden ein Paar von komplementären Variablen.

einfacher: Wie auch immer ein Freiheitsgrad eines System präpariert wird, es gibt immer eine dazu komplementäre Messung, die völlig unbestimmt ist.

5.2.1 Unschärferelation Ort - Impuls

5.2.1.1 Beugung am Spalt

- Elektronen im bestimmten Impuls p vor dem Spalt
- Bestimmung des Ortes der einfallenden Welle (Teilchen) mit Genauigkeit Δx
- Wie groß ist die Genauigkeit in der Bestimmung des Impulses?
- Wellen werden an Objekten gebeugt, die in etwa von der selben Größenordnung wie die Wellenlänge sind

- Breite des Beugungsmuster: $\theta \approx \frac{\lambda}{\Delta x}$, $k = 2\pi/\lambda$

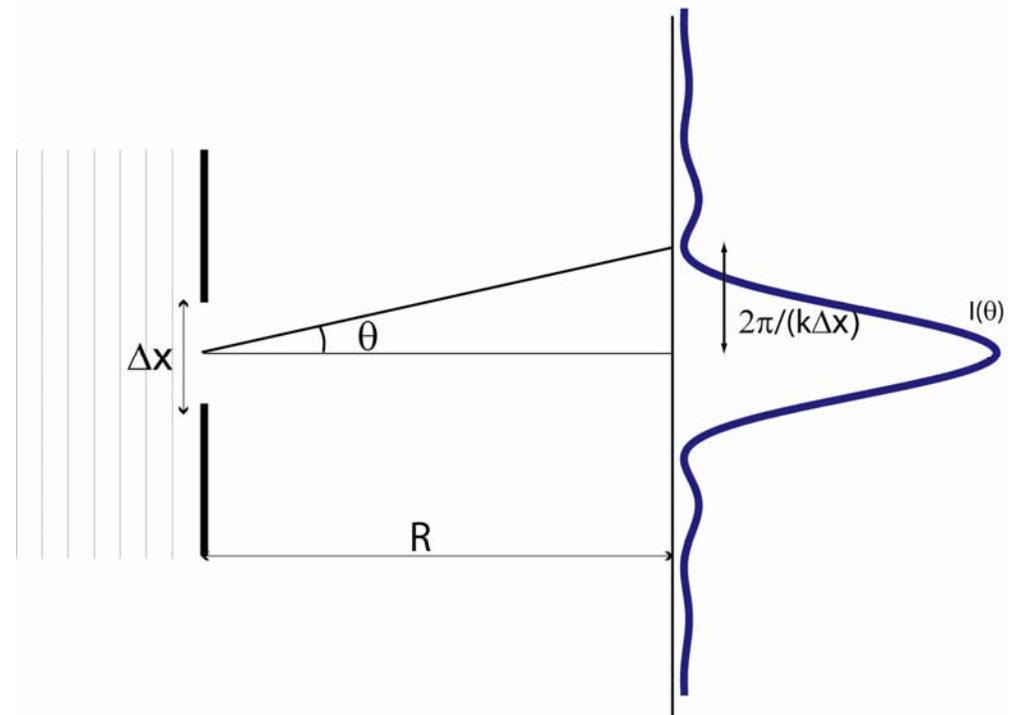
- d.h.: transversaler Impulsübertrag $\frac{\Delta p}{p} \approx \theta$

- $\Delta p \approx p\theta \approx \frac{h}{\lambda}\theta = \frac{h}{\lambda} \frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{h}{\Delta x}$

$$\Delta x \Delta p \geq h$$

- **Je genauer man Δx messen will, desto schlechter ist die Impulsauflösung!**

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \quad \beta = \frac{k\Delta x}{2} \sin \theta$$



5.2.1.2 Elektronenbahnen um Kern - Unschärferelation liefert stabile Atome

- Elektron in Atomhülle hat eine **(klassische)** Energie von

$$E_{\text{klass}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- Virialsatz aus der klassischen Mechanik: $E_{\text{klass}} = -\frac{e^2}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0 r}$

- Für r gegen 0: E_{klass} gegen $-\infty$ und folglich existiert keinen kleinsten Bahnradius.

- naive **quantenmechanische** Betrachtung ergibt mit $\Delta p \sim p$ und $\Delta x \sim r$, d.h. $p \sim h/r$

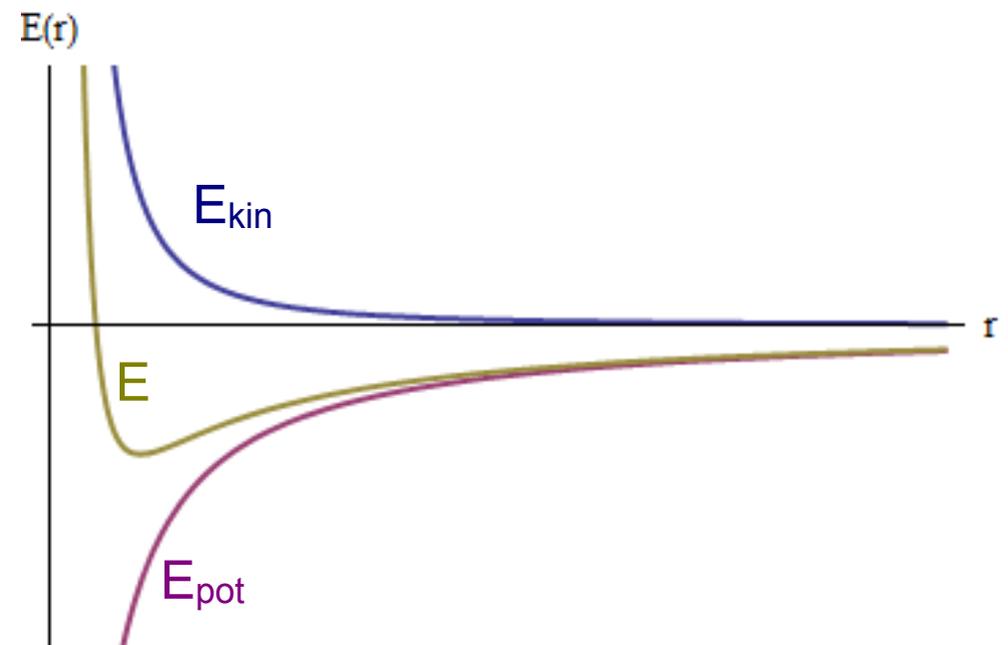
$$E = \frac{1}{2m_e} \frac{h^2}{r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \rightarrow \text{Min.} \neq 0$$

- r_{min} ist folglich gegeben durch

$$r = \frac{h^2 4\pi\epsilon_0}{m_e e^2}$$

- Ersetzen wir $h \rightarrow \hbar$

- Bohrradius (siehe später) $a_0 = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{m_e e^2}$



5.2.2 Unschärfe in Energie und Zeit - Linienbreite eines Photonenübergangs

$$\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar$$

- Energieänderung eines Systems $E(t)-E(t')$ im Zeitraum $\Delta t = t-t'$ ist von der Größenordnung $\hbar/\Delta t$
- *anders*: Energieerhaltungssatz kann in der Quantenmechanik nur mit einer Genauigkeit von $\hbar/\Delta t$ überprüft werden.
- aber: Energie kann zu jedem beliebigen Zeitpunkt mit beliebiger Genauigkeit gemessen werden (im Gegensatz zu Ort und Impuls)

• Beispiel :

- Atom im angeregten Zustand
- genaue Zeit des Zerfalls zufällig, Lebensdauer $\Delta t \sim \tau = 1/\gamma$
- Strahlungsamplitude:

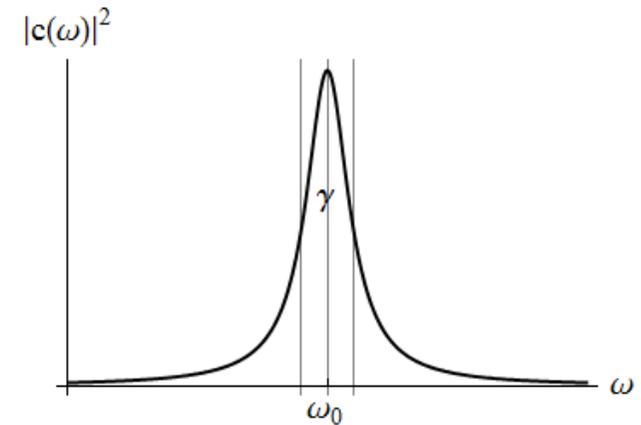
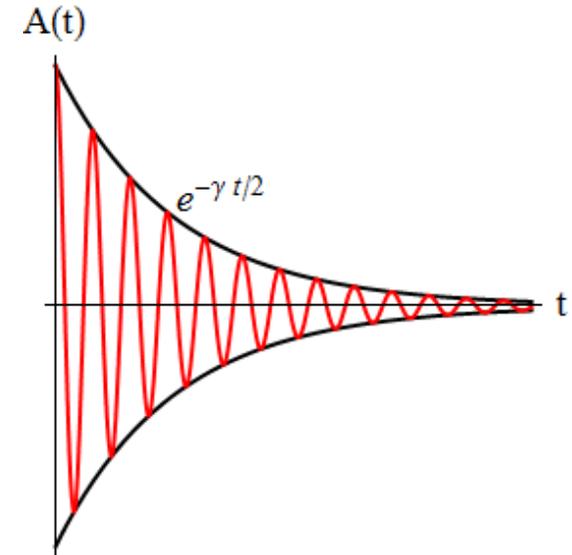
$$A(t) = A(0)e^{-\gamma t/2} \cos \omega_0 t$$

- Mittelung über Atomensemble: exponentieller Zerfall (Rate γ)
($dN/dt = -\gamma \rightarrow N(t) = N(0) e^{-\gamma t}$)
- damit verbundene Energieunschärfe des emittierten Photons

$$\Delta E \approx \hbar/\tau$$

- natürliche Linienbreite $\Delta\omega = 1/\tau = \gamma$
- Lorentz-Kurve im Frequenzraum

$$|c(\omega)|^2 = A(0)^2 \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2}$$



**langlebiger Atomzustand
→ schmales Frequenzband**

5.2.3 Klassische und Quantenmechanik

Warum spielt die Unschärferelation in der Alltagswelt keine wesentliche Rolle?

$$\hbar = 1.06 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

$$\Delta v = \frac{\hbar}{2m\Delta x} \approx \frac{10^{-25}}{m} \quad \text{für} \quad \Delta x = 10^{-9}$$

Die Bestimmung des Ortes eines Teilchens mit Masse 1g auf 1nm genau erlaubt die gleichzeitige Bestimmung seiner Geschwindigkeit mit einer Genauigkeit von 10^{-22} m/s.

Erst bei der Betrachtung von Systemen von der Größenordnung einzelnen Atomen ($m \sim 10^{-26}$ kg) kommt die Unschärferelation ins Spiel.

Quanteneffekte vernachlässigbar, sobald $\hbar \rightarrow 0$
(Übergang Quantenmechanik - Klassische Mechanik)