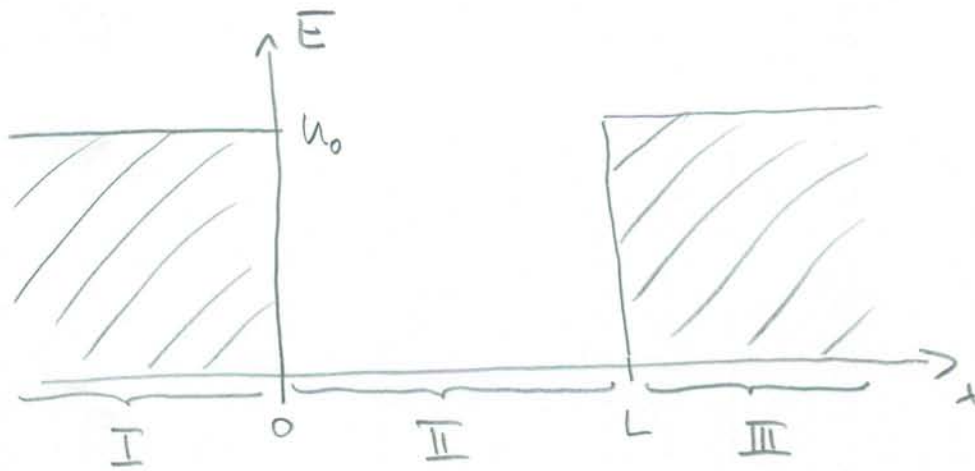


# Potentialtopf im 1D mit endlich hohen Wänden



- Potential: I:  $V = U_0$  für  $x \leq 0$
- II:  $V = 0$  für  $0 < x < L$
- III:  $V = U_0$  für  $x \geq L$

- betrachte gebundenes Teilchen mit  $E < U_0$
- löse zeitunabhängige SGEL in den Regionen I, II, III und beachte Stetigkeit von  $u$  und  $\frac{\partial u}{\partial x}$

SGEL 
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + V u = E u$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \underbrace{\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}}_{k^2} u = 0$$

Was bedeuten komplexe bzw. reelle  $k$  für die Wellenfunktion?

$k$ : Wellenvektor der Materiewelle

$\Rightarrow$  reell für  $E - V > 0$

$\Rightarrow$  komplex für  $E - V < 0$

# allgemeine Lösung

Region I ( $-\infty < x \leq 0$ ):

$$u_I(x) = C e^{i k_I x} + D e^{-i k_I x}$$

exponentiell  
abfallende  
Wellenfunktion  
für  $x < 0$

$$\text{mit } k_I = \frac{\sqrt{2m(E - U_0)}}{\hbar} = i \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$$

Region II ( $0 < x < L$ ):

oszillierende Wellen-  
funktion

$$u_{II}(x) = A \sin k_{II} x + B \cos k_{II} x$$

$$\text{mit } k_{II} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Region III ( $L \leq x < \infty$ ):

exponentiell abfallende  
Wellenfunktion ( $x > 0$ )

$$u_{III} = F e^{i k_{III} x} + G e^{-i k_{III} x}$$

$$\text{mit } k_{III} = i \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$$

Lösungen der  
Wellenfunktionen  
auf Folien bzw.  
im QM auf dem  
Computer!

- finde Koeffizienten  $A, B, D, F$  unter Verwendung der Randbedingungen

$$u_I(0) = u_{II}(0)$$

$$u_{II}(L) = u_{III}(L)$$

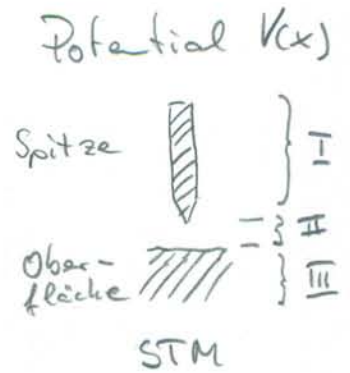
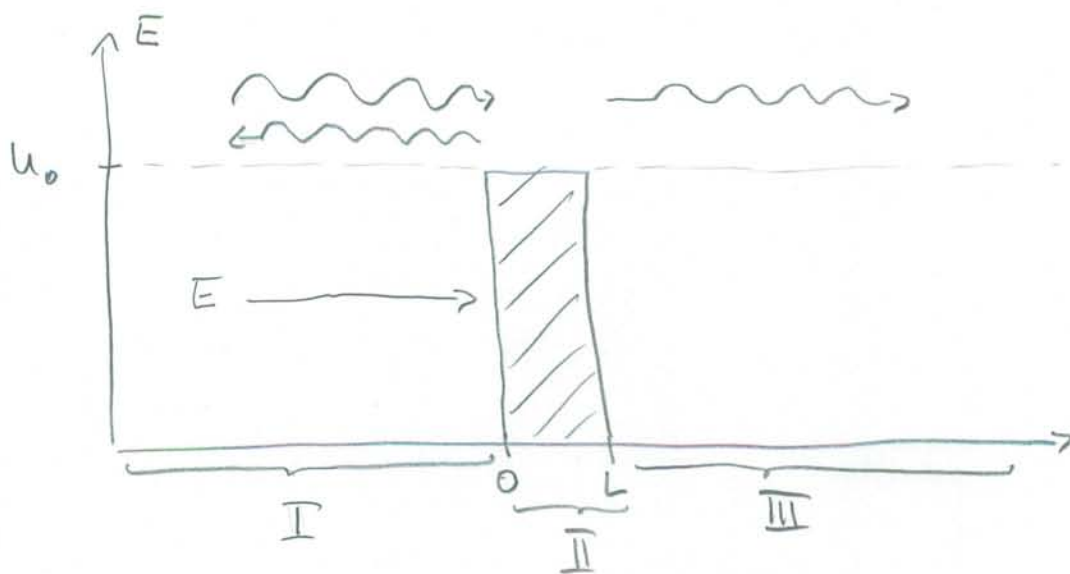
Stetigkeit der Wellenfunktion

$$\frac{\partial u_I}{\partial x}(0) = \frac{\partial u_{II}}{\partial x}(0)$$

$$\frac{\partial u_{II}}{\partial x}(L) = \frac{\partial u_{III}}{\partial x}(L)$$

Stetigkeit der Ableitungen  
der Wellenfunktion

# Der Tunnel effekt



Betrachte Teilchen mit Energie  $E < U_0$

- Schrödinger-Gleichung in Regionen I, II, III

$$\text{I: } -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{\text{I}} = E u_{\text{I}}$$

$$\text{II: } -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{\text{II}} + U_0 u_{\text{II}} = E u_{\text{II}}$$

$$\text{III: } -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{\text{III}} = E u_{\text{III}}$$

Zeige analytische Lösung im MMA.

- Die Lösungen in I, II, III

$$\text{I: } u_{\text{I}} = \underbrace{A e^{ik_{\text{I}}x}}_{\text{einfallende Welle}} + \underbrace{B e^{-ik_{\text{I}}x}}_{\text{reflektierte Welle}} \quad \text{mit } k_{\text{I}} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\text{II: } u_{\text{II}} = C e^{k_{\text{II}}x} + D e^{-k_{\text{II}}x} \quad \text{mit } k_{\text{II}} = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$$

zerfallende Wellenfunktion in der Barriere

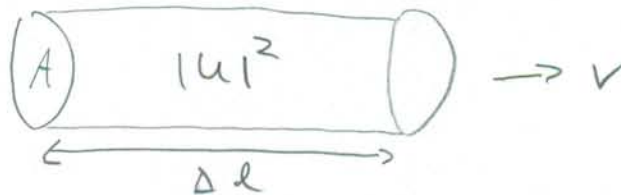
$$\text{III: } u_{\text{III}} = \underbrace{F e^{i k_{\text{III}} x}}_{\text{rechtslaufende Welle}} + \underbrace{G e^{-i k_{\text{III}} x}}_{\text{linkslaufende Welle}} \quad \text{mit } k_{\text{III}} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = k_{\text{I}}$$

- betrachte den **Teilchenfluss S** zur Berechnung des Reflexions bzw. Transmissionskoeffizienten

$$S = |u|^2 v \quad v: \text{Teilchengeschwindigkeit}$$

$|u|^2$ : Wahrscheinlichkeitsdichte

Vgl. Streuprobleme:



- Transmissionswahrscheinlichkeit oder **Transmissionskoeffizient**

$$T = \frac{|u_{\text{III}}|^2 v_{\text{III}}}{|u_{\text{I}}|^2 v_{\text{I}}} \approx \frac{F F^*}{A A^*} \frac{v_{\text{III}}}{v_{\text{I}}}$$

- Bestimme Koeffizienten  $A, B, C, D, F$  aus Randbedingungen

$$\left. \begin{aligned} u_{\text{I}}(0) &= u_{\text{II}}(0) \\ u_{\text{II}}(L) &= u_{\text{III}}(L) \end{aligned} \right\} \text{stetige Aufenthaltswahrscheinlichkeit}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_{\text{I}}}{\partial x}(0) &= \frac{\partial u_{\text{II}}}{\partial x}(0) \\ \frac{\partial u_{\text{II}}}{\partial x}(L) &= \frac{\partial u_{\text{III}}}{\partial x}(L) \end{aligned} \right\} \text{stetiger Teilchenfluss}$$



- Lösung der Gleichungen nach  $\frac{A}{F}$ :

$$\frac{A}{F} = \left[ \frac{1}{2} + \frac{i}{4} \left( \frac{k_{II}}{k_I} - \frac{k_I}{k_{II}} \right) \right] e^{(ik_I + k_{II})L} + \left[ \frac{1}{2} - \frac{i}{4} \left( \frac{k_{II}}{k_I} - \frac{k_I}{k_{II}} \right) \right] e^{(ik_I - k_{II})L}$$

↳ Vereinfachung für den Fall kleiner Teilchenenergie  $E$  gegenüber Barrierehöhe  $U_0$

①  $E \ll U_0 \Rightarrow k_{II} \gg k_I$

$$\Rightarrow \frac{k_{II}}{k_I} - \frac{k_I}{k_{II}} \approx \frac{k_{II}}{k_I}$$

②  $e^{k_{II}L} \gg e^{-k_{II}L}$

$$\Rightarrow \frac{A}{F} \approx \left( \frac{1}{2} + \frac{i}{4} \frac{k_{II}}{k_I} \right) e^{(ik_I + k_{II})L}$$

- damit ergibt sich der Transmissionskoeffizient für  $v_{III} = v_I \approx v$

$$T = \frac{FF^*}{AA^*} = e^{-2k_{II}L} \left( \frac{16}{4 + \underbrace{\left( \frac{k_{II}}{k_I} \right)^2}_{\parallel \frac{U_0 - E}{E}}} \right)$$

$\frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$

↳ starke exponentielle Energie- und Längenabhängigkeit des Transmissionskoeffizienten