Fragestellung: Unter welchen Bedingungen ist der Erwartungswert $\langle \hat{F} \rangle$ einer Observablen $\hat{F}$ scharf bestimmt?

$$\langle \hat{F} \rangle = \int \psi^* \hat{F} \psi \, dx$$

Scharf bedeutet hier, dass die Varianz $(\Delta F)^2$ des Erwartungswertes verschwindet.

$$(\Delta F)^2 = \langle (\hat{F} - \langle \hat{F} \rangle)^2 \rangle = 0$$

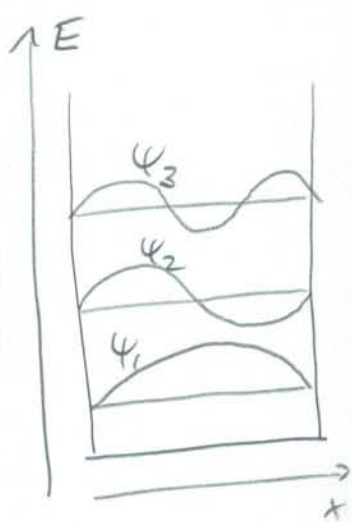
Welche Beziehung muss zwischen der Wellenfunktion ψ, die den Zustand des Systems beschreibt und dem Operator $\hat{F}$ gelten?

Beispiel: Teilchen im Potentialtopf

$$\hat{H} \psi_n = E_n \psi_n$$

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n x \pi}{a}\right)$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$



Wann ist $\langle \hat{H} \rangle = \int \psi^* \hat{H} \psi \, dx$ scharf bestimmt,

d.h. für welche ψ ist $(\Delta E)^2 = 0$?

Eigenwerte und Eigenfunktionen von Observablen

- Scharfe und unscharfe Erwartungswerte einer Observablen F.

- Für ein Teilchen im Zustand ψ_0 ist der Erwartungswert $\langle F \rangle$ einer Observablen F scharf, wenn bei wiederholter Messung an identisch gleich präparierten Teilchen immer derselbe Wert F_0 resultiert.

- mathematische Formulierung

$$\boxed{(\Delta F)^2 = \langle (F - \langle F \rangle)^2 \rangle_{\psi_0} = 0}$$

↳ Mittelwert der Quadrate der Abweichungen vom Erwartungswert muss verschwinden.

↳ scharfer Erwartungswert
$\Rightarrow$ Varianz $(\Delta F)^2 = 0$

↳ unscharfer Erwartungswert
$\Rightarrow$ Varianz $(\Delta F)^2 \neq 0$

• Beispiele:

- scharfe Erwartungswerte:

  - Teilchen im Potentialtopf hat scharf bestimmte Energie

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 n^2$$

im Zustand ψ_n zur Quantenzahl n

⇒ Varianz $\Delta E_n \to 0$

⇒ kompatibel mit Heisenberg'scher Unschärferelation für $\Delta t \to \infty$

$$\Delta E \, \Delta t \approx h$$

  - freies Teilchen mit $\psi = A \, e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}$

⇒ E, p scharf bestimmt

⇒ x unscharf, da $\psi^* \psi = \text{const.}$

- Unscharfe Erwartungswerte

  - Gauss'sches Wellenpaket

  - Ort und Impuls eines Teilchens am Doppelspalt

- Damit eine Observable F den scharfen Wert F_0 hat muss die Wellenfunktion ψ_0 die Eigenwertgleichung

$$\boxed{\hat{F}\psi_0 = F_0 \psi_0}$$

erfüllen.

Dann ist ψ_0 eine Eigenfunktion des Operators $\hat{F}$ zum Eigenwert F_0.

⇝ Beweis durch Berechnung der Varianz

$$(\Delta F)^2_{\psi_0} \stackrel{!}{=} 0$$

⇝ Wenn bei wiederholter Messung der Observablen F an einem im Zustand ψ_0 präparierten Teilchen der Wert F_0 gemessen wird so ist ψ_0 ein Eigenzustand des Operators $\hat{F}$ zum Eigenwert F_0.

3. Postulat: Das Ergebnis einer einzelnen Messung einer Observablen F ist ein Eigenwert des zugehörigen Operators $\hat{F}$.

Beispiel: Teilchen im Potentialtopf. Was wird gemessen $\psi = (\psi_1 + \psi_2)\frac{1}{\sqrt{2}}$?