

Gleichzeitige Eigenfunktionen von Operatoren

- Eine Observable F hat den scharfen Wert F_0 wenn der Zustand des Teilchens Ψ die Eigenwertgleichung

$$\hat{F} \Psi = F_0 \Psi$$

erfüllt.

Gibt es Zustände Ψ , die gleichzeitig Eigenfunktionen verschiedener Operatoren sind?

- Es gibt Zustände Ψ bei denen die Erwartungswerte verschiedener Observable gleichzeitig scharf sind.

- Beispiele:
 - Energie E und Impuls \vec{p}
 - Energie E und Drehimpuls \vec{L}
 - Ortskoordinate x und orthogonaler Impuls p_y
 - orthogonale Impuls Komponenten p_x und p_y

- explizites Beispiel: Teilchen im 1D im räumlich und zeitlich konstantem Potential V

$$\Psi(x,t) = A e^{\frac{i}{\hbar} p x} e^{-\frac{i}{\hbar} E t}$$

$\Rightarrow \Psi$ ist gleichzeitig Eigenfunktion von $\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$
und $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$

• Allgemein gilt:

Zwei Observable \hat{F} und \hat{G} eines Teilchens im Zustand Ψ sind dann und nur dann **gleichzeitig scharf**, wenn die Anwendung des Kommutators von \hat{F} und \hat{G} auf die Wellenfunktion Ψ null ergibt

$$\boxed{[\hat{F}, \hat{G}] \Psi = 0}$$

z \Rightarrow folgt mit $\hat{F} \Psi = F_0 \Psi$ und $\hat{G} \Psi = G_0 \Psi$

- Beispiele:

• $[\hat{x}, \hat{p}_x] \neq 0$

• $[\hat{x}, \hat{p}_y] = 0$

• $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] \neq 0$

Komponenten des Drehimpuls kommutieren nicht.

• $[\hat{H}, \hat{L}^2] = [\hat{H}, \hat{L}_z] = [\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0$

beim Wasserstoff-Atom

Orthogonalität von Eigenfunktionen

$$\hat{F}\psi_m = F_m \psi_m$$
$$\hat{F}\psi_n = F_n \psi_n$$

ψ_m und ψ_n seien Eigenfunktionen eines Hermiteschen Operators \hat{F} , die zu den verschiedenen Eigenwerten F_m und F_n gehören. Dann sind ψ_m und ψ_n in ihrem räumlichen Existenzgebiet orthogonal, d.h.

$$\int \psi_m^* \psi_n dx = 0 \quad \text{für } m \neq n$$

mathematische Definition der Orthogonalität zweier Funktionen

Beispiel: - Wellenfunktionen ψ_n zu Energieeigenwerten E_n beim Teilchen im Potentialtopf

Begründung: - ist Konsequenz der Hermitizität von \hat{F}

$$\int \psi^* \hat{F} \psi dx = \int \psi \hat{F}^* \psi^* dx$$

- ebenfalls gilt für unterschiedliche Wellenfunktionen ψ_a, ψ_b

$$\int \psi_a^* \hat{F} \psi_b dx = \int \psi_a \hat{F}^* \psi_b^* dx$$

- mit $\hat{F} \psi_m = F_m \psi_m$ und

$\hat{F} \psi_n = F_n \psi_n$ folgt

$$\int \psi_m^* \psi_n dx = 0$$

Entartung

- Häufig gehören mehrere verschiedene Eigenfunktionen zum selben Eigenwert F_m eines Operators \hat{F} . Dieser Fall wird Entartung genannt.
- Eigenfunktionen, die zum selben Eigenwert gehören sind nicht notwendigerweise orthogonal.
- Beispiel: Teilchen in einem 2D oder 3D Potential topf.
 - ↳ mehrere Eigenfunktionen des Hamilton-Operators haben identische Energien-Eigenwerte, sind also entartet

Linearkombinationen von Eigenfunktionen

- Eine Linearkombination von Eigenfunktionen des Operators \hat{F} zum selben Eigenwert F_0 ist wieder eine Eigenfunktion des Operators \hat{F} zum selben Eigenwert F_0 .

Sei: $\hat{F} \psi_1 = F_0 \psi_1$

$$\hat{F} \psi_2 = F_0 \psi_2$$

so gilt

$$\hat{F} (c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2) = F_0 (c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2)$$

- Diese Tatsache erlaubt es z.B. aus zwei nicht notwendigerweise orthogonalen Eigenfunktionen ψ_1, ψ_2 eines Operators \hat{F} zwei neue orthogonale Eigenfunktionen zu kombinieren.

z.B. $\Psi_1 = \psi_1$

$$\Psi_2 = \frac{\psi_2 - \psi_1 \int \psi_1^* \psi_2 dx}{\sqrt{1 - \left| \int \psi_1^* \psi_2 dx \right|^2}}$$

$$\int \psi_1^* \psi_2 dx \neq 0$$

mit
 $\hat{F} \psi_1 = F_0 \psi_1$
 $\hat{F} \psi_2 = F_0 \psi_2$

Linearkombinationen von Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten.

- Eine Eigenfunktion eines Operators \hat{F} stellt einen Zustand dar in welchem die Observable F einen scharfen Erwartungswert hat. **Fragestellung:**
- Welche physikalische Bedeutung hat ein Zustand, der eine Linearkombination von Eigenfunktionen des Operators \hat{F} zu verschiedenen Eigenwerten ist?

Beispiel: - Betrachte Eigenfunktionen des Hamiltonoperators \hat{H} für ein Teilchen im Potentialtopf.

$$\Psi_n(x) = u_n(x) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}$$

$$\text{mit } E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$

$$\text{und } u_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n x \pi}{a}\right)$$

- und die Linearkombination

$$\Psi = c_1 u_1 e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} + c_2 u_2 e^{-\frac{i}{\hbar} E_2 t} + \dots + c_n u_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}$$

- Jeder Summand ist Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung.

→ Ψ ist ebenfalls eine Lösung: Superposition.

- $\Psi^* \Psi$ ist explizit zeitabhängig,
daher ist Ψ kein stationärer Zustand.

Allgemeine Betrachtung

- Betrachte Observable F deren Operator \hat{F} die zu den Eigenwerten F_1, F_2, \dots, F_i gehörende Eigenfunktionen $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_i$ besitzt, so dass die Eigenwertgleichungen $\hat{F} \Psi_i = F_i \Psi_i$ gelten.
- Berechne den Erwartungswert $\langle F \rangle$ für den allg. Superpositionszustand $\Psi = c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2 + \dots + c_i \Psi_i$

$$\langle F \rangle = \int \Psi^* \hat{F} \Psi dx$$

$$= \int (c_1^* \Psi_1^* + c_2^* \Psi_2^* + \dots + c_i^* \Psi_i^*) (c_1 F_1 \Psi_1 + c_2 F_2 \Psi_2 + \dots + c_i F_i \Psi_i)$$

$$= c_1^* c_1 F_1 + c_2^* c_2 F_2 + \dots + c_i^* c_i F_i$$

da $\int \Psi_m^* \Psi_m dx = \delta_{mm}$ (Ψ_m sind normiert und orthogonal)

- Interpretation: - Einzelne Messungen der Observablen F im Zustand Ψ ergeben Messwerte F_i mit Wahrscheinlichkeit $W_i = c_i^* c_i$
 \Rightarrow 3. Postulat!

- Für den Erwartungswert $\langle F \rangle$ gilt

$$\langle F \rangle = w_1 \bar{F}_1 + w_2 \bar{F}_2 + \dots + w_i \bar{F}_i$$

welches gerade dem Mittelwert von F entspricht.

Entwicklung nach Eigenfunktionen

Alle Eigenfunktionen ψ_i eines Hermiteschen Operators \hat{F} bilden ein orthogonales Funktionensystem. Ist dieses System vollständig, so lässt sich jeder Zustand Ψ eines quantenmechanischen Systems als Linearkombination dieser Eigenfunktionen ψ_i schreiben.

\Rightarrow diese wird dann als Entwicklung der Wellenfunktion Ψ nach den Eigenfunktionen des Operators \hat{F} bezeichnet

\leadsto erlaubt die Wahrscheinlichkeiten $w_i = c_i^* c_i$ der möglichen Messwerte \bar{F}_i der Observablen F zu bestimmen.