Physik IV 2011 - Übung 4

18. März 2011

1. **Fermi-Bose-Boltzmann Verteilung** $\sum 2\frac{1}{2}$

   Ein ideales Gas befinde sich in einer Box mit Volumen $V = L^3$. Das Gas besteht entweder aus Teilchen, die die Bose-Einstein oder Fermi-Dirac Statistik erfüllen. Die mittlere Anzahl der Teilchen mit Energie E ist durch

   $$\langle n(E) \rangle = \frac{1}{e^{(E-\mu)/(k_B T)} \mp 1},$$

   gegeben, wobei $-/+$ für Bose bzw. Fermi Statistik steht. $\mu < 0$ bezeichnet das chemische Potential des Gases, k_B die Boltzmannkonstante und T die Temperatur des Systems.

   (a) Berechnen Sie die Anzahl der Teilchen $dN(E)$ mit einer Energie zwischen E und $E + dE$ als Funktion der Parameter des Systems (V, μ, Teilchenmasse m, etc.). Hinweis: Die Energie eines einzelnen Teilchens beträgt $E = \hbar k^2/(2m)$. Gehen Sie bei Ihrer Rechnung von der Anzahl der erlaubten Moden für ein Teilchen mit Wellenzahl k zwischen k und $k + dk$ aus. [1]

   (b) Zeigen Sie, dass im Grenzfall eines stark verdünnten Gases, in dem der mittlerer Abstand zwischen den Teilchen $d \equiv (V/N)^{1/3}$ viel grösser als die de Broglie Wellenlänge $\lambda_D = h(2\pi m k_B T)^{-1/2}$ eines Teilchens, das System sowohl für fermionische als auch bosonische Teilchen durch die klassische Boltzmann Verteilung $\langle n(E) \rangle = e^{-(E-\mu)/(k_B T)}$ beschrieben werden kann. [$1\frac{1}{2}$]

2. **Dispersion eines Wellenpakets:** $\sum 3$

   Ein freies Teilchen kann approximativ durch ein normiertes Gausssches Wellenpaket beschrieben werden:

   $$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{i(kx-\omega t)} dk \quad \text{mit}$$

$$g(k) = \left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{1/4} e^{-a^2(k-k_0)^2/4}.$$

(a) Berechnen Sie $\Psi(x,0)$ und $|\Psi(x,0)|^2$.
Hinweis: Vervollständigen Sie das Quadrat im Exponenten und verwenden Sie das Standardintegral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2(\zeta+\beta)^2} d\zeta = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}$$

(mit komplexen Zahlen α und β). [1]

(b) Die Breite der Gaussfunktion is definiert als der Punkt, an dem die Amplitude auf $1/\sqrt{e}$ abgefallen ist. Wie gross ist die Breite Δx und Δk von $|\Psi(x,0)|^2$ bzw. $g(k)$? Wie gross ist $\Delta x \Delta k$? [1]

(c) Die räumliche Ausdehnung eines Gaussschen Wellenpakets nimmt gemäss der Formel

$$|\psi(x,t)|^2 = \sigma_x(t)^{-1} \exp\left[-\frac{(x-x_0-v_g t)^2}{2\sigma_x^2(t)}\right]$$

mit $\sigma_x^2(t) = (\sigma_x(0))^2 + \alpha^2 t^2/(2\sigma_x(0))^2$ zu. $\sigma_x(0)$ ist die räumliche Ausdehung zum Zeitpunkt $t = 0$, $v_g = d\omega/dk$ und $\alpha = d^2\omega/dk^2$. Wie lange dauert es bis $\sigma_x(t)$ das Doppelte der ursprünglichen Ausdehnung $\sigma_x(0)$ beträgt? Berechnen Sie diese Zeitdauer sowohl für ein Elektron als auch für eine Metallkugel mit einer Masse von 10 g, wenn die ursprüngliche Ortsunschärfe $\sigma_x(0) = 10^{-10}$ m beträgt. Erklären Sie, warum die Dispersion des Wellenpakets nur im quantenmechanischem Fall relevant ist. [1]

3. **Wellenlänge eines Photons und eines massiven Teilchens** $\sum 2\frac{1}{2}$

(a) Berechnen Sie die Wellenlänge eines Photons mit Energie 100 eV. Vergleichen Sie diese mit der de Broglie Wellenlänge eines Elektrons und eines Protons mit derselben kinetischen Energie $E_{\text{kin}} = 100$ eV. [$\frac{1}{2}$]

(b) Leiten Sie die Beziehung

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{E_{\text{kin}}(E_{\text{kin}} + 2m_0c^2)}}$$

zwischen der de Broglie Wellenlänge eines Teilchens mit Masse m und seiner kinetischen Energie E_{kin} her. Zeigen Sie, dass die de

Broglie Wellenlänge des Teilchens der Wellenlänge eines Photons mit derselben Gesamtenergie entspricht, wenn die Gesamtenergie des Teilchens viel grösser als dessen Ruheenergie ist. [1]

(c) Die Auflösung

$$d = \frac{\lambda}{2\mathrm{NA}}$$

eines optischen Mikroskops ist durch Streuung auf ≈ 200 nm limitiert. Die numerische Apertur NA beträgt typischerweise ≈ 1. Ein Elektronenmikroskop kann aufgrund der kleineren de Broglie Wellenlänge von Elektronen viel kleinere Auflösungen erreichen. Berechnen Sie die streuungslimitierte Auflösung eines Rasterelektronenmikroskops bei einer Beschleunigungsspannung von 20 kV. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der tatsächlichen Auflösung von ≈ 5 nm und nennen Sie mögliche Gründe für den Unterschied. [1]

4. **Avogadro Konstante:** $\sum 2$

Für die Neudefinition des Kilograms basierend auf fundamentalen Konstanten ist eine genaue Bestimmung der Avogadro Konstante notwendig. Durch zählen der Atome in einer 1 kg schweren Siliziumkugel konnte diese kürzlich an der PTB Braunschweig zu $N_A = 6.02214078(18) \cdot 10^{23}$ mol^{-1} bestimmt werden (Andreas *et al.*, Phys. Rev. Lett. **106**, 030801 (2011)).

(a) Um den Gitterebenenabstand der (220)-Netzebene d_{220} in einem Siliziumkristall zu bestimmen, kann Röntgenbeugung verwendet werden. Ein Maximum erster Ordnung der Röntgenstrahlen wurde dabei unter einem Winkel von 31.3853° zur Oberfläche des Kristalls detektiert werden. Die verwendete Röntgenstrahlung hat eine Wellenlänge von 0.1 nm. Bestimmen Sie den sich daraus ergebenden Netzebenenabstand. $[\frac{1}{2}]$

(b) Berechnen Sie den Radius einer Silizium Kugel (^{28}Si) mit einer Masse von 1 kg. Das atomare Volumen, d.h. das Volumen eines einzelnen Atoms im Silizium Kristall, ist durch $V_{atom} = \sqrt{8} d_{220}^3$ gegeben. $[\frac{1}{2}]$

(c) Um die Avogadro-Konstante $\mathrm{N_A}$ mit hoher Präzision messen zu können, müssen auch alle anderen relevanten Parameter wie die molare Masse von Silizium, die Reinheit, das Volumen und die Masse des Kristalls, sowie der Netzebenenabstand genau bekannt sein. Welche Präzision in der Bestimmung des Radius der Siliziumkristallkugel wird mindestens benötigt, damit $\mathrm{N_A}$ mit einer relativen Genauigkeit von 10^{-6} bestimmt werden kann? $[\frac{1}{2}]$

Abbildung 1: Silizium Kugel zum Messen der Avogadro Konstante

(d) Es gibt drei natürlich vorkommende Silizium-Isotope: ^{28}Si, ^{29}Si und ^{30}Si mit den relativen Häufigkeiten 92.23%, 4.68% und 3.09%. Wie verändert sich der Radius der Kristallkugel, wenn diese Unreinheiten mitberücksichtigt werden? $[\frac{1}{2}]$

II. **Mathematica (optional)** $\sum 2$

(a) Berechnen Sie mit Hilfe von Mathematica den Wert der Wienschen Verschiebungskonstanten in der Frequenzdarstellung. [1]

(b) Zum Zeitpunkt t_{SLS} ('surface of last scattering') war die Temperatur des Universums nicht mehr hoch genug, um Wasserstoff zu ionisieren und es kam zur Entkopplung von Licht und Materie - siehe Serie 3, Beispiel 1. Bestimmen Sie die Temperatur des Universums unter der Annahme, dass das Maximum der Energieverteilung der Photonen der Ionisationsenergie $|E_0| = 13.6$ eV von Wasserstoff entsprach. [$\frac{1}{2}$]

(c) Tatsächlich beträgt die Temperatur zum Zeitpunkt t_{SLS} $T = 3000\ K$. Der Grund dafür ist, dass bis zu dieser Temperatur genügend hochenergtische Photonen im Spektrum vorhanden sind, um Wasserstoff weiterhin zu ionisieren. Berechnen Sie den Energieanteil oberhalb der Ionisationsenergie bei der Temperatur $T = 3000\ K$. [$\frac{1}{2}$]