Physik IV 2011 - Übung 9

5. Mai 2011

1. **Harmonischer Oszillator und Grundzustandsenergie** $\sum 3$

   (a) Die Wellenfunktion des Grundzustands eines harmonischen Oszillators (Potential $U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$) ist durch

   $$\psi_0(x) = Ce^{-\alpha x^2/2}$$

   gegeben. Zeigen Sie, dass diese Wellenfunktion eine Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung darstellt und berechnen Sie sowohl die Normierungskonstante C als auch die Grundzustandsenergie E_0. [1]

   (b) Berechnen Sie die quantenmechanische Unschärfe des Orts Δx und des Impulses Δp im Grundzustand und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Heisenberg'schen Unschärferelation. [1]

   (c) Ein Pendel mit einer Masse von 1 g am Ende eines masselosen Fadens der Länge 250 mm oszilliert mit einer Frequenz von $\omega = \sqrt{g/l}$. Wie gross ist die quantenmechanische Grundzustandsenergie? Wie leicht können diese Oszillationen detektiert werden? $[\frac{1}{2}]$

   (d) Das Pendel schwingt mit einer kleinen Amplitude, bei der sich die Masse maximal 1 mm oberhalb seiner Gleichgewichtsposition befindet. Wie lautet die entsprechende Quantenzahl? $[\frac{1}{2}]$

2. **Harmonischer Oszillator** $\sum 3$

   (a) Der Vernichtungsoperator eines harmonischen Oszillators der Masse m und Kreisfrequenz ω mit Potential $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ ist durch

   $$\hat{a} = \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}(m\omega\hat{x} + i\hat{p})$$

   gegeben. Zeigen Sie, dass die Relation $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ gilt. [1]

(b) Berechnen Sie durch Anwendung des Erzeugungsoperators ausgehend vom Grundzustand

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} e^{-m\omega x^2/2\hbar}$$

den ersten angeregten Zustand $\psi_1(x)$. [1]

(c) Wie lautet der Erwartungswert der Energie $\hat{O} = \hbar\omega(\hat{n} + 1/2)$ mit dem Teilchenzahloperator $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ für den Zustand $\psi_1(x)$? [$\frac{1}{2}$]

(d) Ein harmonische Oszillator mit einer Frequenz von $\nu = \omega/(2\pi) =$ 10 GHz befinde sich im Superpositionszustand $\psi(x, t_0) = (2\psi_0(x) + \psi_1(x))/\sqrt{5}$. Geben Sie einen Ausdruck für die Zeitentwicklung $\psi(x, t)$ des Systems an und berechnen Sie, nach welcher Zeit das System wieder in den Anfangszustand $\psi(x, t_0)$ zurückkehrt. [$\frac{1}{2}$]

3. **Bahndrehimpuls im Wasserstoffatom** $\sum 2\frac{1}{2}$

(a) Berechnen Sie den Bahndrehimpuls $|\vec{L}|$ eines Elektrons im Wasserstoffatom für Zustände mit $l = 3$ und skizzieren Sie die möglichen magnetische Quantenzahlen in einem Vektordiagramm. [1]

(b) Nehmen Sie an, dass ϕ_{m_l} ein Eigenzustand zum Operator $\hat{L}_z$ mit Eigenwert $\hbar m_l$ ist. Benützen Sie die Relationen aus Serie 7 - Aufgabe 2 um zu zeigen, dass die Zustände $\hat{L}_\pm\phi_{m_l}$ Eigenzustände von $\hat{L}_z$ zum Eigenwert $\hbar(m_l \pm 1)$ sind. [$\frac{1}{2}$]

(c) Leiten Sie die Form der (unnormierten) Eigenzustände ϕ_{l_l} ausgehend von den Bedingungen $L_+\phi_{l_l} = 0$ und $L_z\phi_{l_l} = \hbar l\phi_{l_l}$ her. [1]

4. **Superposition von Wellenfunktionen des Wasserstoffatoms** $\sum 1\frac{1}{2}$

Jeder elektronische Zustand des Wasserstoffatoms kann durch eine Linearkombination der Basiszustände $\psi_{n,l,m}(r, \theta, \phi) = R_{n,l}(r)Y_{l,m_l}(\theta, \phi)$ beschrieben werden. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der Zustände $\psi_{n,l,m}$ sind symmetrisch um die z-Achse. Zeigen Sie dies explizit für $\psi_{2,l,m}$. Was können Sie zusätzlich über die Symmetrie des $\psi_{2,0,0}$ Zustandes aussagen? (Hinweis: Der Radialteil der Wellenfunktion $R_{n,l}$ ist sphärisch symmetrisch für alle n und l.) [$1\frac{1}{2}$]

VI. **Mathematica (optional)** $\sum 2$

Ein parametrischer harmonischer Oszillator ist ein harmonischer Oszillator, dessen Parameter sich als Funktion der Zeit ändern. Ein bekanntes Beispiel ist ein Kind auf einer Schaukel, das durch periodische Änderung seines Schwerpunktes immer höher schaukelt. Zeigen Sie ausgehend von dem in der Zusatzvorlesung gezeigten Beispiel (*mathematica5.nb*), wie sich die Energie eines anfänglich im Grundzustand präparierten Teilchens in einem harmonischen Oszillatorpotential ändert, wenn das Potential gemäss der Formel

$$V = \frac{1}{2}k(1 + A\cos\omega_p t)x^2$$

oszilliert. Die Masse des Teilchen ist (in dimensionslosen Einheiten) $m = 1$, die Kraftkonstante $k = 30$ und die Amplitude der parametrischen Oszillation ist $A = 0.2$. Erstellen Sie ein Diagramm der Energie als Funktion der Zeit t von $t = 0$ bis $t = 3T = 3(2\pi/\omega)$ für die beiden Fälle $\omega_p = \omega$ und $\omega_p = 2\omega$, wobei $\omega = \sqrt{k/m}$ die stationäre Oszillatorfrequenz ist. Die Energie kann über das stationäre Oszillatorpotentials mit $A = 0$ berechnet werden, $E(t) = \int \psi^*(t)\hat{H}\psi(t)dx$.