

Kapitel 13

Der Spin des Elektrons

Wie in Abschnitt 12.4 angedeutet, ist in der Realität die Aufspaltung der Spektrallinien im homogenen externen Magnetfeld nicht alleine durch den normalen Zeeman-Effekt erklärbar. Es sind Aufspaltungen in vier, sechs oder mehr Linien beobachtbar, deren Abstand nicht durch den normalen Zeeman-Effekt erklärt werden können. Im Weiteren kann bereits ohne Anlegen eines externen Magnetfelds eine Aufspaltung diverser Spektrallinien in Doppellinien beobachtet werden. Auf diese sogenannte *Feinstruktur* und dessen Erklärung wollen wir in diesem und in den folgenden Kapiteln näher eingehen.

Wir gehen als erstes auf ein paar Experimente ein, die auf das Auftreten einer Feinstruktur in atomaren Spektren hinweisen und die zur *Hypothese des Elektronspins* geführt haben. Anschliessend betrachten wir die Einbindung dieser neuen Grösse in den bisher kennengelernten Formalismus der Quantenmechanik und einer möglichen mathematischen Formulierung für den Elektronspin mittels den sogenannten *Pauli-Matrizen*.

In Kapitel 14 widmen wir uns dann der Wechselwirkung zwischen dem Elektronspin und dem Drehimpuls des Elektrons, d.h. der sogenannten *Spin-Bahn-Kopplung* und damit der Erklärung der im Experiment beobachteten Feinstruktur. Im Weiteren befassen wir uns mit dem Einfluss eines externen Magnetfelds auf das Spektrum eines Atoms unter Einbezug des Elektronspins, d.h. dem sogenannten *anomalen Zeeman-Effekt*.

13.1 Experimentelle Beobachtungen

Wir beginnen mit der Beschreibung einiger experimentellen Beobachtungen, die auf das Auftreten einer Feinstruktur in atomaren Spektren hinweisen. Zum Beispiel beobachtet man ohne externen Felder die Aufspaltung der ersten Linie der Balmer-Serie ($n = 3 \rightarrow n = 2$) des Wasserstoffatoms bei der Wellenlänge $\lambda = 656.3$ nm in eine Doppellinie mit Wellenlängenabstand $\Delta\lambda = 0.14$ nm.

Diese Aufspaltung wird auch bei der gelben Linie der Natrium-Dampflampe beobachtet. Diese Linie entspricht dem Übergang $3p \rightarrow 3s$ und ist in der Spektroskopie unter dem Namen Natrium-*D*-Linie bekannt. Das Experiment zeigt, dass sie aus zwei Linien besteht, D_1 mit $\lambda = 589.6$ nm und D_2 mit $\lambda = 589.0$ nm. Die Untersuchung der weiteren Übergänge $np \rightarrow 3s$ zeigt auch lauter Dop-

pellinien, dessen Abstand mit steigender Hauptquantenzahl n systematisch abnimmt. Aus dieser Systematik kann man schliessen, dass es die p -Niveaus sind, die aufgespalten sind und nicht das $3s$ -Niveau. Ganz allgemein findet man bei wasserstoffähnlichen Atomen, dass alle Niveaus, die Zuständen mit $l \neq 0$ entsprechen in zwei Niveaus aufgespalten sind.

Diese beim Wasserstoffatom und der Natrium-Dampfampe beobachtete Aufspaltung einzelner Spektrallinien in Doppellinien ist ein Anzeichen dafür, dass die drei Quantenzahlen n , l und m_l , die den drei Freiheitsgraden eines Massepunkts entsprechen, nicht zur Beschreibung des Zustands eines Elektrons genügen. Es muss eine vierte Quantenzahl, die wir m_s nennen, eingeführt werden. Die Doppellinien deuten an, dass diese neue Quantenzahl m_s zwei Werte annehmen kann.

An dieser Stelle gerät man in Versuchung zu vermuten, dass die neue Quantenzahl damit zusammenhängen könnte, dass man das Elektron bisher als Massepunkt und nicht als einen Körper endlicher Ausdehnung aufgefasst hat. Jedoch würde dies zu drei weiteren Freiheitsgraden und damit drei zusätzlichen Quantenzahlen führen. Die Begründung der neuen Quantenzahl lieferten S.A. Goudsmit und G.E. Uhlenbeck in einer von ihnen 1925 formulierten Hypothese:

Hypothese des Elektronspins

Das Elektron verhält sich als ob es einen Eigendrehimpuls hätte, dessen z -Komponente zwei diskrete Werte (charakterisiert durch die Quantenzahl m_s) annehmen kann. Dieser Eigendrehimpuls wird *Spin* genannt und mit \vec{S} bezeichnet.

Bevor wir uns der Einbindung dieser neuen Grössen in den Formalismus der Quantenmechanik zuwenden, befassen wir uns mit einem Experiment, das einen weiteren Hinweis auf die Existenz des Elektronspins liefert.

13.1.1 Das Stern-Gerlach-Experiment

O. Stern und W. Gerlach führten im Jahr 1922 Experimente mit Atomstrahlen durch. Der Experimentaufbau ist in Abb. 13.1 skizziert. In einer hochevakuierten Apparatur erzeugten sie einen Silber-Atomstrahl, indem sie aus einem

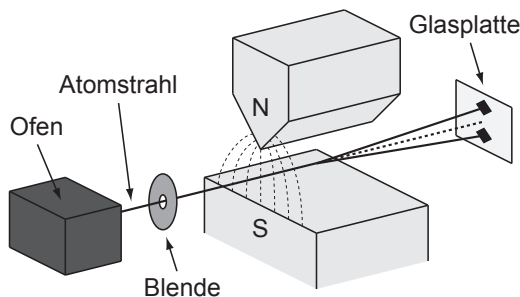


Abb. 13.1: Aufbau des Stern-Gerlach-Experiments.

kleinen Ofen durch ein Blendensystem hindurch Silber-Dampf austreten lassen. Dieser Atomstrahl wurde durch ein stark inhomogenes Magnetfeld (mit $B_z \gg B_x, B_y$) hindurchgeschickt und dann auf einer Glasplatte aufgefangen. Dabei wirkt auf ein Atom die folgende Kraft

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}(-\vec{\mu}\vec{B}) \sim \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \vec{e}_z. \quad (13.1)$$

Bei ausgeschaltetem Magnetfeld läuft der Strahl, wie zu erwarten ist, geradeaus und es entsteht ein Silberfleck auf der Glasplatte, welcher der Blendengeometrie entspricht. Bei eingeschaltetem Magnetfeld würde man nach den bisherigen Erläuterungen zum Zeeman-Effekt (siehe Kapitel 12) eine Aufspaltung in eine ungerade Anzahl (genauer $2l+1$) von Strahlen und damit Flecken auf der Glasplatte erwarten. Die von Stern und Gerlach in ihrem Experiment verwendeten Silberatome bestehen aus mehreren gefüllten Elektronenschalen und einem Elektron, welches sich im $5s$ -Zustand ($l=0$) befindet. Der Gesamtdrehimpuls der Elektronen, der gefüllten Schalen, verschwindet. Demzufolge können diese in unseren Betrachtungen vernachlässigt werden und wir können uns alleine auf das äusserste Elektron konzentrieren. Für dieses gilt $l=0$ ($5s$ -Zustand) und demzufolge würde man keine Aufspaltung erwarten. Wäre das äusserste Elektron angeregt und befindet sich in einem $5p$ -Zustand ($l=1$), dann würde man als Folge des Zeeman-Effekts eine Aufspaltung in drei Strahlen (Flecken) erwarten.

Das Experiment zeigt jedoch eine Auspaltung in zwei Strahlen (Flecken). Folglich muss das Elektron einen inneren Drehimpuls (Spin) besitzen, dessen z -Komponente zwei diskrete Werte annehmen kann.

13.2 Einbindung in den Formalismus der Quantenmechanik

Bevor wir uns mit der Einbindung des Elektronspins in den Formalismus der Quantenmechanik befassen, versuchen wir eine klassische Motivation zu geben. Die Idee ist, den Spin (Eigendrehimpuls) und das entsprechende magnetische Moment durch die Rotation des Elektrons um eine feste Achse zu erklären. Schätzt man jedoch die Grösse des Elektrons mit $r_e < 10^{-16}$ m ab, so müsste die Rotationsfrequenz, die benötigt wird, um den beobachteten Drehimpuls und das magnetische Moment zu erklären, so hoch sein, dass die Rotationsgeschwindigkeit am Äquator des Elektrons die Lichtgeschwindigkeit überschreiten würde. Folglich scheitert eine klassische Motivation und wir halten fest:

Es existiert keine klassische Erklärung für das Phänomen des Elektronspins.

Wir kommen zur quantenmechanischen Behandlung. Obwohl kein klassisches Pendant existiert, entsprechen die Eigenschaften des Elektronspins \vec{S} den Eigenschaften des Drehimpulses \vec{L} des Elektrons. Die Einbindung in den Formalismus der Quantenmechanik ergibt sich daher im Wesentlichen aus der Analogie zum Drehimpuls \vec{L} . Jedoch wird sich zeigen, dass die Analogie auch ihre Grenzen hat.

1. Der Spinoperator und die Spinwellenfunktion

Der Drehimpulsoperator \hat{L} ist allgemein als Differentialoperator darstellbar (vgl. Abschnitt 9.3.2)

$$\hat{L} = \frac{\hbar}{i} \begin{pmatrix} y\partial/\partial z - z\partial/\partial y \\ z\partial/\partial x - x\partial/\partial z \\ x\partial/\partial y - y\partial/\partial x \end{pmatrix}. \quad (13.2)$$

und wirkt auf die Wellenfunktion $\psi(x, y, z, t)$.

Im Gegensatz dazu lässt sich der Spinoperator \hat{S} nicht durch einen Differentialoperator darstellen. Dem inneren Freiheitsgrad des Elektrons entspricht nicht eine Raumkoordinate, sondern eine klassisch nicht deutbare *Spinvariable* σ . Jedoch gilt die Analogie insofern, dass wie zu den Ortskoordinaten x, y, z die Wellenfunktion $\psi(x, y, z, t)$ gehört, der Spinvariablen σ eine *Spinfunktion* $\chi(\sigma)$ entspricht. Der Spinoperator \hat{S} wirkt auf diese Spinfunktion.

2. Kommutationsregeln

Die Heisenbergsche Unschärferelation steckt in den Kommutationsregeln. Diese sind sozusagen eine physikalische Charakterisierung der Operatoren. Entsprechend der Analogie zwischen Spin und Drehimpuls ergeben sich daher für den Spinoperator \hat{S} die selben Kommutationsregeln wie für den Drehimpulsoperator \hat{L} (vgl. Abschnitt 9.3.3). Es gilt

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z \quad \rightarrow \quad [\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar\hat{S}_z, \quad (13.3)$$

$$[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar\hat{L}_x \quad \rightarrow \quad [\hat{S}_y, \hat{S}_z] = i\hbar\hat{S}_x, \quad (13.4)$$

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar\hat{L}_y \quad \rightarrow \quad [\hat{S}_z, \hat{S}_x] = i\hbar\hat{S}_y. \quad (13.5)$$

3. Eigenwertgleichungen und Eigenfunktionen

Für den Drehimpulsoperator \hat{L} gelten die folgenden Eigenwertgleichungen (vgl. Abschnitt 11.2.2)

$$\hat{L}_z\psi_{n,l,m_l}(r, \vartheta, \varphi, t) = \hbar m_l\psi_{n,l,m_l}(r, \vartheta, \varphi, t), \quad (13.6)$$

$$\hat{L}^2\psi_{n,l,m_l}(r, \vartheta, \varphi, t) = \hbar^2 l(l+1)\psi_{n,l,m_l}(r, \vartheta, \varphi, t), \quad (13.7)$$

wobei wir die Eigenfunktionen $\psi_{n,l,m_l}(r, \vartheta, \varphi, t)$ in Abhängigkeit von Polarkoordinaten r, φ und ϑ ausgedrückt haben. Für die beiden Quantenzahlen l und m_l gilt dabei

$$l = 0, 1, 2, \dots, (n-1), \quad (13.8)$$

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l. \quad (13.9)$$

Dementsprechend gibt es für ein festes l $(2l+1)$ Eigenfunktionen von \hat{L}_z . Weiter gilt, dass die Quantenzahlen n, l und m_l verändert werden können, zum Beispiel durch die Einstrahlung von Photonen und dass sich

die Aufenthaltswahrscheinlichkeit $|\psi(r, \vartheta, \varphi, t)|^2 dV$ sich für grosse Quantenzahlen der klassischen Aufenthaltswahrscheinlichkeit nähert, d.h. es gilt das *Korrespondenzprinzip*.

Analog gelten für den Spinoperator \hat{S} die folgenden Eigenwertgleichungen

$$\hat{S}_z \chi_{m_s}(\sigma) = \hbar m_s \chi_{m_s}(\sigma), \quad (13.10)$$

$$\hat{S}^2 \chi_{m_s}(\sigma) = \hbar^2 s(s+1) \chi_{m_s}(\sigma), \quad (13.11)$$

wobei die Quantenzahl m_s ($2s+1$) Werte annehmen kann. Nach der von Goudsmit und Uhlenbeck formulierten Hypothese des Elektronspins muss also gelten $(2s+1) = 2$ und demzufolge $s = 1/2$ als einziger möglicher Wert für s und $m_s = \pm 1/2$. Wir halten fest:

Der Spin des Elektrons wird durch die Quantenzahlen $s = 1/2$ und $m_s = \pm 1/2$ charakterisiert. Wir sagen, das Elektron besitzt den Spin $1/2$. Entsprechend gelten die folgenden Eigenwertgleichungen

$$\hat{S}_z \chi_{\pm 1/2}(\sigma) = \pm \frac{1}{2} \hbar \chi_{\pm 1/2}(\sigma), \quad (13.12)$$

$$\hat{S}^2 \chi_{\pm 1/2}(\sigma) = \frac{3}{4} \hbar^2 \chi_{\pm 1/2}(\sigma). \quad (13.13)$$

Der Zustand $\chi_{+1/2}(\sigma)$ wird als „*spin up*“ und der Zustand $\chi_{-1/2}(\sigma)$ als „*spin down*“ bezeichnet.

Im Gegensatz zu den Quantenzahlen n , l und m_l , ist also s unveränderlich¹. Weiter ist der Übergang zu hohen Quantenzahlen nicht möglich, der Spin hat kein klassisches Analogon.

4. Das magnetische Moment

Obwohl der Spin klassisch nicht erfasst werden kann, ist es manchmal ganz nützlich, wenn man sich unter dem Elektron ein rotierendes geladenes Kügelchen vorstellt. Aufgrund dieser Vorstellung erwartet man zum Beispiel ein dem Spin entsprechendes magnetisches Moment $\vec{\mu}^{(s)}$. Jedoch zeigt sich hier, dass die Analogie zum Drehimpuls \vec{L} ihre Grenzen hat. Denn es gilt für die z-Komponente des magnetischen Moments μ_z (vgl. Abschnitt 12.2) bzw. $\mu_z^{(s)}$ hervorgerufen durch den Bahndrehimpuls \vec{L} bzw. Spin \vec{S} des Elektrons

$$\mu_z = -\mu_B m_l, \quad m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l, \quad (13.14)$$

$$\mu_z^{(s)} = -g_0 \mu_B m_s, \quad m_s = \pm 1/2, \quad (13.15)$$

wobei $g_0 = 2.00231923$ *gyromagnetischer Faktor* genannt wird. Damit ist das gyromagnetische Verhältnis γ , d.h. das Verhältnis zwischen magnetischem Moment und Drehimpuls bzw. Spin, beim Spin des Elektrons mehr als doppelt so gross wie beim Drehimpuls².

¹Aus diesem Grund verzichten wir auch auf den Index s bei den Eigenfunktionen $\chi_{m_s}(\sigma)$.

²Es gilt: $\gamma_{\text{Spin}} = g_0 \mu_B / \hbar$ und $\gamma_{\text{Drehimpuls}} = \mu_B / \hbar$.

5. Die Zeeman-Aufspaltung

Nach Abschnitt 12.2 gilt für das Elektron des Wasserstoffatoms unter Vernachlässigung des Spins im Zustand $\psi_{n,l,m_l}(r, \vartheta, \varphi)$: Die Energieniveaus $E_n = -E_R/n^2$ charakterisiert durch die Quantenzahl n spalten sich im homogenen externen Magnetfeld \vec{B} in $(2l + 1)$ Niveaus $E_{n,m_l} = -E_R/n^2 + \mu_B B m_l$ charakterisiert durch die Quantenzahlen n und m_l mit Abstand $\Delta = \mu_B B$ auf. Der entsprechende Hamiltonoperator \hat{H} ist gegeben durch

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \frac{eB}{2m} \hat{L}_z \quad \text{mit} \quad \hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (13.16)$$

Entsprechend gilt für ein freies Elektron der festen Energie E mit Spin σ im Zustand $\chi_{m_s}(\sigma)$: Das Energieniveau E spaltet sich in zwei Niveaus $E_{m_s=+1/2} = E + g_0\mu_B B/2$ und $E_{m_s=-1/2} = E - g_0\mu_B B/2$ auf charakterisiert durch die Quantenzahl m_s mit dem folgenden Abstand

$$\Delta^{(s)} = g_0\mu_B B. \quad (13.17)$$

Der entsprechende Hamiltonoperator \hat{H} ist gegeben durch

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + g_0 \frac{eB}{2m} \hat{S}_z \quad \text{mit} \quad \hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta. \quad (13.18)$$

Als Zusammenfassung zeigt Tab. 13.1 eine Gegenüberstellung der wichtigsten Eigenschaften des Elektronspins und des Drehimpulses.

Bemerkung

Es sei bemerkt, dass das Elektron nicht das einzige Elementarteilchen ist, das einen Spin aufweist. Das Proton und das Neutron besitzen ebenfalls den Spin $1/2$. Die entsprechenden magnetischen Momente μ_p und μ_n sind unterschiedlich, jedoch beide von der Grössenordnung des Kernmagnetons

$$\mu_K = \frac{e\hbar}{2m_p}, \quad (13.19)$$

wobei m_p die Masse des Protons bezeichnet. Das Kernmagneton μ_K ist 1836 mal kleiner als das Bohr-Magneton μ_B . Interessant ist dabei vor allem auch die Tatsache, dass das Neutron, obwohl es keine Ladung besitzt ein magnetisches Moment aufweist.

Neben den Elementarteilchen besitzen auch einige Atomkerne einen Spin. Es existieren Kerne mit ganzzahligem $(1, 2, 3, \dots)$ und Kerne mit halbzahligem $(1/2, 3/2, 5/2, \dots)$ Spin. Alle Atomkerne mit Spin besitzen ein entsprechendes magnetisches Moment, das von der Grössenordnung von μ_K ist. Dabei hängt das Verhältnis zwischen Spin und magnetischem Moment jeweils von der Kernsorte ab.

13.3 Die Pauli-Matrizen

Als nächstes lernen wir eine elegante mathematische Darstellung für den Elektronspin \vec{S} kennen. Der Spin ist eine physikalische Observable und deshalb ist der entsprechende Operator \hat{S}_z hermitesch. Nach Satz 9.5 lässt sich demnach jede beliebige Spinfunktion $\chi(\sigma)$ als Linearkombination der beiden orthogonalen (vgl. Satz 9.3) und normierten Eigenfunktionen $\chi_{+1/2}(\sigma)$ und $\chi_{-1/2}(\sigma)$ schreiben

$$\chi(\sigma) = \alpha_+ \chi_{+1/2}(\sigma) + \alpha_- \chi_{-1/2}(\sigma), \quad (13.20)$$

wobei $\alpha_+, \alpha_- \in \mathbb{C}$ und aufgrund der Normierung

$$|\alpha_+|^2 + |\alpha_-|^2 = 1. \quad (13.21)$$

In anderen Worten: Die Eigenfunktionen $\chi_{+1/2}(\sigma)$ und $\chi_{-1/2}(\sigma)$ bilden die Basis des zweidimensionalen Raums der Spinfunktionen $\chi(\sigma)$ und wir können sie als zweidimensionale Spaltenvektoren schreiben

$$\chi_{+1/2}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \chi_{-1/2}(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (13.22)$$

Entsprechend lautet nach 13.20 die allgemeine Spinfunktion $\chi(\sigma)$ in dieser Darstellung

$$\chi(\sigma) = \begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \alpha_- \end{pmatrix}. \quad (13.23)$$

	Drehimpuls \vec{L}	Spin \vec{S}
Operator	\hat{L}	\hat{S}
Wellenfunktion	$\psi(x, y, z, t)$	$\chi(\sigma)$
Kommutationsregeln	$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z$ $[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar\hat{L}_x$ $[\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar\hat{L}_y$	$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar\hat{S}_z$ $[\hat{S}_y, \hat{S}_z] = i\hbar\hat{S}_x$ $[\hat{S}_z, \hat{S}_x] = i\hbar\hat{S}_y$
Eigenfunktionen	$\psi_{n,l,m_l}(x, y, z, t)$	$\chi_{m_s}(\sigma)$
Eigenwerte	$\hat{L}_z: \hbar m_l$ $\hat{L}^2: \hbar^2 l(l+1)$	$\hat{S}_z: \hbar m_s$ $\hat{S}^2: 3/4\hbar^2$
Quantenzahlen	$n \in \mathbb{N}$ $l = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$	$s = 1/2$ $m_s = \pm 1/2$
magnetisches Moment	$\mu_z = -\mu_B m_l$	$\mu_z^{(s)} = -g_0 \mu_B m_s$
Zeeman-Aufspaltung	$\Delta = \mu_B B$	$\Delta^{(s)} = g_0 \mu_B B$

Tab. 13.1: Gegenüberstellung der wichtigsten Eigenschaften des Drehimpulses \vec{L} und des Elektronspins \vec{S} .

In dieser Darstellung entsprechen die Operatoren \hat{S}_x , \hat{S}_y und \hat{S}_z Matrizen. Es gilt

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y, \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z, \quad (13.24)$$

wobei σ_x , σ_y und σ_z den sogenannten *Pauli-Matrizen* entsprechen und gegeben sind durch

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (13.25)$$

Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass wenn wir nicht die z-Achse ausgezeichnet hätten, sondern die x- oder y-Achse, dann wäre nicht \hat{S}_z , sondern entsprechend \hat{S}_x oder \hat{S}_y diagonal. Der Spinoperator \hat{S} lautet entsprechend

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} \hat{S}_x \\ \hat{S}_y \\ \hat{S}_z \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} \quad (13.26)$$

und das Quadrat \hat{S}^2 des Spinoperators

$$\hat{S}^2 = \frac{\hbar^2}{4} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) = \frac{3\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (13.27)$$

13.3.1 Leiteroperatoren

Oft werden zusätzlich die sogenannten *Leiteroperatoren* \hat{S}_+ und \hat{S}_- eingeführt, die, wie wir sehen werden, einen Zustandswechsel bewirken.

Definition 13.1 Die *Leiteroperatoren* \hat{S}_+ und \hat{S}_- sind definiert als

$$\hat{S}_+ = \hat{S}_x + i\hat{S}_y, \quad (13.28)$$

$$\hat{S}_- = \hat{S}_x - i\hat{S}_y. \quad (13.29)$$

In Matrixschreibweise ergeben sich mit (13.24) folgende Darstellungen

$$\hat{S}_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (13.30)$$

$$\hat{S}_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (13.31)$$

Die Anwendung der Leiteroperatoren auf die beiden Zustände $(1, 0)$ und $(0, 1)$ ergibt somit

$$\hat{S}_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad (13.32)$$

$$\hat{S}_+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (13.33)$$

$$\hat{S}_- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (13.34)$$

$$\hat{S}_- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (13.35)$$

Wir sehen, wie zu Beginn angedeutet, dass die Leiteroperatoren \hat{S}_+ und \hat{S}_- einen Zustandswechsel bewirken. Genauer ausgedrückt, erhöht der Operator \hat{S}_+ die dem Zustand entsprechende Quantenzahl m_s um 1 und der Operator \hat{S}_- erniedrigt sie um 1. Entsprechend wird in Analogie zum quantenmechanischen harmonischen Oszillator (vgl. Kapitel 10) \hat{S}_+ *Erzeugungsoperator* und \hat{S}_- *Vernichtungsoperator* genannt.

Literaturverzeichnis

- [1] F. Pedrotti, L. Pedrotti, W. Bausch, und H. Schmidt, *Optik für Ingenieure, Grundlagen*, Springer, Berlin Heidelberg New York, 2005.
- [2] A.H. Compton, Phys. Rev. **21**, 483 (1923).
- [3] http://www.satgeo.de/satgeo/quicklooks/methoden/fe_physik.htm, 27.10.2010.
- [4] <http://de.wikipedia.org/wiki/Sonne>, 27.10.2010.
- [5] <http://de.wikipedia.org/wiki/Sonnenradius>, 27.10.2010.
- [6] <http://de.wikipedia.org/wiki/Emissionsgrad>, 27.10.2010.
- [7] <http://www.periodensystem.info/download/>, 22.02.2011.
- [8] H. Haken, und H. Wolf, *Atom- und Quantenphysik, Einführung in die experimentellen und theoretischen Grundlagen*, Springer, Berlin Heidelberg New York, 2004.
- [9] <http://www2.selu.edu/Academics/Faculty/delbers/emission-spectra-1.jpg>, 14.01.2011.
- [10] F. Schwabl, *Quantenmechanik (QM I), Eine Einführung*, Springer, Berlin Heidelberg New York, 2002.
- [11] A. Goldberg, H.M. Schey, und J.L. Schwartz, American Journal of Physics **35**, 177 (1967).
- [12] J. Jackson, *Klassische Elektrodynamik*, de Gruyter, Berlin, 2006.